

The background is a vibrant red field filled with a dense collage of white line-art icons. These icons represent various educational and play concepts: numbers (1-9), mathematical operations (+, -), geometric shapes (squares, rectangles, triangles), a bus, a tractor, a hand, a cat, a rabbit, a pig, a hedgehog, a robot, and various building block configurations. The text is centered in white, bold, sans-serif font.

**PRE RODIČOV**

# **HEJNÉHO METÓDA**

Zaslúžená radosť z poznávania

„Na základe mojich pozorovaní a rozhovorov s učiteľmi a žiakmi, ale aj vďaka nedávnym prieskumom v Českej republike som presvedčený, že Hejného metóda učenia sa matematiky je jedinečná a mnohostranne úspešná. Dovoľuje žiakom rozvíjať svoju radosť z učenia sa a skúmania. Dovoľuje im budovať si trvalé matematické poznanie, rozvíjať svoje abstraktné myslenie a stratégie riešenia problémov. Podnecuje ich prirodzenú potrebu veciam rozumieť. Hejného metóda buduje aj tradičné matematické zručnosti, ale inou, atraktívnou, trvácnu, aj keď menej viditeľnou cestou.“

prof. RNDr. Ivan Kalaš, PhD.  
garant projektu Informatika s Emilom  
vedúci Katedry didaktiky matematiky, fyziky a informatiky FMFI UK

„S Hejného metódou vyučovania matematiky som sa stretla v tomto školskom roku po prvýkrát. Dostala som triedu, ktorá išla podľa HM od 1. ročníka ZŠ. Priznám sa, zo začiatku som jej nebola veľmi naklonená, ale napriek tomu som ju začala podrobnejšie študovať. Absolvovala som dve dvojdnové školenia a postupne som jej prichádzala na chuť. Dnes podľa nej učím veľmi rada, pretože keď deti prídu samy na spôsob, ako narysovať pravidelný osemuholník a pritom zväzknú od radosti, je to neopísateľný pocit nielen pre nich, ale aj pre mňa ako učiteľa.“

PaedDr. Renáta Hrkútová  
učiteľka, Evanjelická spojená škola Martin

„V Hejného metóde je matematika taká iná, lebo máme veľa spôsobov, ako zistiť výsledok a ešte sa pri tom hráme.“

Marína Kalinčáková, KZŠ s MŠ A. Bernoláka, Martin, 2. ročník ZŠ

„Podľa mňa je Hejného metóda super. Hlavne to, že každý typ úlohy je o niečom úplne inom a zábavnou formou nás učí napr. zlomky alebo dvojkovú sústavu. Podľa mňa je celkom ľahká, ale veľmi zaujímavá. Je dobrá aj v tom, že všetko v nej je logické a nič si nemusím pamätať naspamäť.“

Žofia Bartová, SZŠ Bajkalská, Bratislava, 5. ročník ZŠ

**Ďalšie a podrobnejšie skúsenosti**

**konkrétnych ľudí nájdete na**

**[www.indicia.sk/ohlasy](http://www.indicia.sk/ohlasy),**

**kam môžete tiež pridať vlastnú skúsenosť.**

# VÍT HEJNÝ: „DBAJ NA TO, ABY TVOJA SNAHA NAUČIŤ ŽIAKOV MATEMATIKU NEPREVÝŠILA TVOJU SNAHU VYCHOVAŤ SLUŠNÝCH ĽUDÍ.“

Milí rodičia,

slová motta mi povedal otec v čase, keď som sa rozhodol učiť matematiku v jednej triede na základnej škole.

Predstavu slušného človeka charakterizoval dvojicou podmienok:

- je činorodý, sebavedomý, zodpovedný a spokojný;
- je užitočný pre svoje okolie aj pre spoločnosť.

K týmto dvom cieľom smeruje vyučovanie Hejného metódou. Na to, aby bol občan schopný niečo spoločnosti ponúknuť, musí vedieť niečo, čo spoločnosť potrebuje.

Vyučovanie matematiky k tomu môže prispieť predovšetkým tým, že vyzbrojí budúceho občana schopnosťou kriticky myslieť, analyzovať rôzne problémové situácie a hľadať nové riešenia, či už samostatne alebo v tíme.

Konkrétne znalosti, ako je malá násobilka alebo riešenie kvadratickej rovnice, už dnes zvládne každá lepšia kalkulačka. O desať alebo dvadsať rokov už o konkrétne znalosti nikto nebude stať. Na trhu práce budú nepredajné. Ľudí schopných tvorivo riešiť problémy však je už dnes nedostatok a tieto schopnosti budú vždy na trhu práce žiadané.

## Aké máme ciele?

Hlavný cieľ sformuloval Vít Hejný v motte. Ako sa darí tento cieľ napĺňať, je možné priebežne sledovať podľa nasledujúcich indikátorov:

### Radost' dieťaťa z práce

- dieťa sa na hodiny matematiky teší;
- vyžaduje ďalšie úlohy;
- aj vo voľnom čase sa rozpráva s kamarátmi alebo rodičmi o tom, čo sa dialo na hodine.

>> úvodné slovo, ciele

### Nárast sociálnych schopností

- dieťa má radosť, ak pomôže druhému k úspechu;
- zvyšuje sa jeho kvalita komunikácie (počúvať druhého, neskákať ostatným do reči, argumentovať vecne, nie emočne);
- dieťa dokáže pracovať v tíme, niektoré aj v role lídra;
- v triede sa dokážu dobre riešiť chýlostivé sociálne situácie, ku ktorým dôjde.

### Nárast intelektuálnych schopností

- analyzovať zložitejšie situácie aj procesy;
- hľadať riešiteľské stratégie;
- formulovať slovne aj graficky svoje myšlienky;
- spoznať vlastné schopnosti (dieťa je schopné odhadnúť, čo zvládne samo a pri čom potrebuje pomoc).

### Rozširovanie a prehľbovanie znalostí

Môžeme ich rozdeliť na znalosť pojmov, vzťahov, procesov a argumentov. Tu evidujeme predovšetkým kvalitu znalostí, t. j. hĺbku porozumenia danej znalosti.

V tejto brožúrke sa vám pokúsime priblížiť **metódu** navrhnutú na dosiahnutie uvedených cieľov a **učebnice** pomáhajúce učiteľom, ktorí využívajú tento prístup pri vyučovaní matematiky. Metódu charakterizujeme **12 kľúčovými princípmi**, ktoré sa do učebníc premietajú na prvý pohľad najviditeľnejšie použitím tzv. **didaktických prostredí**, v ktorých sa naše úlohy odohrávajú.

Prajeme vám, aby ste spolu s vašimi deťmi prežívali radosť z ich práce.

**Milan Hejný**

# ROLA RODIČA V HEJNÉHO METÓDE

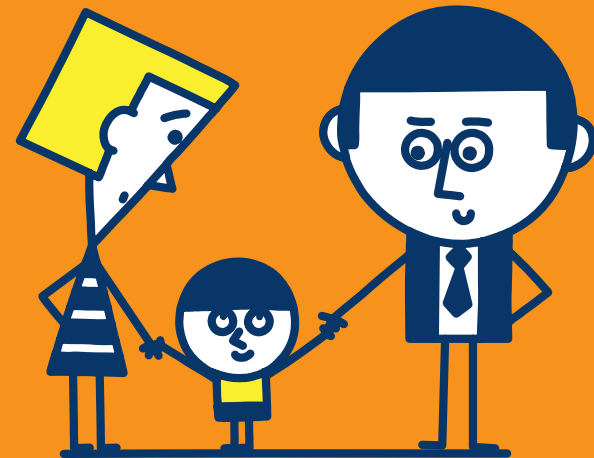
**A**k čítate túto brožúru, je zrejmé, že vám nie je ľahostajné vzdelanie vášho dieťaťa. Majte však na pamäti, že za to, čo sa naučí, je zodpovedné predovšetkým ono samo. Toto vedomie je potrebné uňho postupne s rastúcim vekom budovať, aby sa stalo autonómnou osobnosťou, ktorá je schopná o sebe samostatne rozhodovať a voliť si cestu svojho rozvoja. Vy ste pre svoje dieťa zvolili školu, ktorá mu má vo vzdelávaní pomôcť.

V triede, kam chodí vaše dieťa, bolo zvolené vyučovanie matematiky Hejného metódou. Tá sa radí medzi tzv. **konštruktivistické prístupy k vyučovaniu**, ktoré sa v rôznych obmenách používajú aj v zahraničí. Ich podstatou je to, že matematické pojmy, vzťahy a postupy si žiaci odhaľujú (konštruujú) sami. V škole je rozhodujúcim činiteľom učiteľ. Ten je zodpovedný za to, aby pripravil každému vhodné prostredie pre učenie a ponúkol mu preňho primerané podnety v zóne jeho najbližšieho rozvoja.

Pri vyučovaní matematiky Hejného metódou učiteľ ponúka žiakom primerané úlohy tak, aby každý žiak mal možnosť zažiť radostný okamih objavu. Podporuje spoluprácu žiakov. Ak ide o spoznávanie matematiky, snaží sa držať bokom. **Nepoučuje, neradí, na prípadné chyby žiakov neupozorňuje.** Väčšinu chýb si trieda opraví sama. Keď sa to nedarí, dá triede úlohu, ktorá ich na chybu upozorní. Takto učiteľ moderovaním vyučovania postupne vedie triedu k deklarovaným cieľom. Od nás dostáva ako podporu starostlivo zostavené učebnice a pomôcky.

## Aká je teda rola rodiča?

Deti sa učia matematiku inak, ako ste sa učili vy. Vaše dieťa nie je konzument matematickej múdrosti, ono je jej spolutvorcom. Preto, ak sa chcete do vyučovacieho procesu zapojiť, môžete si dať od svojich detí vysvetľovať, ako sa čo rieši. **Keď sa vám dieťa chváli, že niečo v triede objavilo, buďte pozorný poslucháč.** Tým, že vám dieťa o svojom objave rozpráva,



zvyšuje sa jeho intelektuálne sebavedomie a dostáva sa hlbšie do nového poznania. Na prípadné chyby reagujte zvedavou otázkou, alebo si situáciu namodelujte z fyzických objektov, alebo si ju zahrajte ako divadlo, pri ktorom dieťa samo chybu odhalí.

## Ako môžem dieťaťu pomáhať, keď mu niečo nejde?

Prípadné dlhodobější problémy konzultujte s učiteľom. **Najúčinnějšíu pomoc poskytnite spolužiak, kamarát.** Ak chcete ponúknuť dieťaťu pomoc s konkrétnou úlohou, je vhodné vrátiť sa k podobnej už vyriešenej úlohe a dať si vysvetliť, ako túto úlohu vaše dieťa riešilo. Postupne s ním budete riešiť nasledujúce

úlohy, pri ich riešení sa pokúsite úlohu modelovať, kresliť či zahrať. **Ak sa budete snažiť dieťaťu čokoľvek vysvetľovať, žienete ho do pasivity.** Tiež ste pre dieťa autoritou, od ktorej často preberá fakty bez porozumenia. Dieťa preberie konkrétnu poučku a jeho poznanie tak môže byť narušené. Poučku si navyše nemusí zapamätať správne alebo ju môže použiť v prípade, keď nie je vhodné ju aplikovať. **Ak dieťaťu robí matematika problémy, hľadajte oblasť, ktorá mu ide dobre a tam ho primárne podporujte.**

## Čo ak je dieťa dlhšie choré?

Vo všeobecnosti sa dá povedať - a máme s tým aj konkrétnu skúsenosť - že to neprekáža, ak dieťa chýba aj dlhší čas (napríklad mesiac). Je to vďaka tomu, že naše učebnice nie sú koncipované tak, že sa preberie a precvičí istá látka, a ak žiak v tomto čase chýba, nemôže zvládnuť ďalšie učivo. Sú však koncipované tak, že podstatné poznatky prichádzajú pomaly a **úlohy sa k nim opakované po špirále vracajú.** Dieťa, ktoré chýbalo, sa k nim teda tiež dostane, možno trochu neskôr. Je možné, že si dieťa bude chcieť riešiť úlohy z učebnice samo a tam, kde si nebude vedieť rady, požiadať následne (buď priebežne alebo po návrate do školy) spolužiaka o vysvetlenie. Odporúčame však konzultovať konkrétny prípad s učiteľom.

>>Rola rodiča v Hejného metóde

## Je metóda vhodná aj pre deti so špeciálnymi vzdelávacími potrebami?

Metóda síce podporuje vlastný prežitok, názornosť a rôzne prístupy k riešeniu, čím napomáha pri riešení niektorých špecifických potrieb, ale tak ako pri iných spôsoboch vyučovania je niekedy potrebné vyhľadať pomoc odborníka. Grafické stránky série učebníc prof. Hejného, ktoré vydáva v slovenskom jazyku Indícia, boli s pomocou odborníka prispôsobené tak, aby boli vhodné aj pre tieto deti.

## Ako zistím, že učiteľ učí dobre?

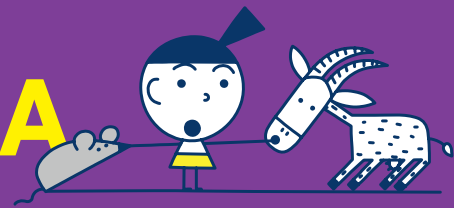
Prvým predpokladom je, že si tento spôsob sám zvolil a nebol mu nikým nariadený. Dieťa by malo mať pozitívny vzťah k hodinám matematiky. Ak máte pochybnosti, skúste sa o ich dôvodoch najskôr porozprávať priamo s učiteľom. Ak to škola umožňuje a súhlasí s tým aj učiteľ, navštívte hodinu. **Sledujte, ako majú žiaci učiteľa radi.** Ak panuje v triede strach alebo nuda, potom učiteľ nie je úspešný. Keď však zvoní na prestávku a k učiteľovi sa žiaci hrnú a žiadajú si ďalšie úlohy, tak je to skvelý učiteľ. Dieťa by malo byť schopné vyriešiť v každej úlohe aspoň variant A, väčšinou variant B. Naopak neprekáža, keď niektoré varianty (napr. E, F) nevyrieši - tie sú často určené pre rozvoj detí, ktoré sú v danej oblasti trochu popredu.

## Naučí sa moje dieťa všetko, čo bude potrebovať?

Hejného metódou prešli rádovo desaťtisíce detí na prvom stupni, ktoré sú teraz na druhom stupni, niektoré na strednej škole. Mnohí, ktorí absolvovali vyučovanie prof. Hejným už v 80. rokoch minulého storočia, sú už dávno úspešní vo svojej kariére v komerčnej aj akademickej sfére. Tí všetci sa museli s prechodom na vyšší stupeň, kde sa Hejného metódou neučilo, vyrovnáť. Naše interné prieskumy potvrdzujú, že deti dôsledne vedené metódou skutočne získavajú schopnosti, na ktoré cieľme, a **ne-majú problém ani s jednotnými prijímacími skúškami na stredné školy,** ktoré sú svojou koncepciou podobné štátnej maturitnej skúške. V Českej republike dokonca Národný ústav pre vzdelávanie a Česká školská inšpekcia (viac na [www.h-mat.cz/zkusenosti](http://www.h-mat.cz/zkusenosti)) nezávisle od seba pri skúmaní výsledkov v medzinárodnom testovaní TIMSS 2015, ktoré testuje len niektoré v úvode deklarované ciele, konštatovali, že žiaci učiteľov, ktorí učia podľa učebníc prof. Hejného, mali v priemere lepšie výsledky ako ostatní. To môže byť, samozrejme, ovplyvnené aj ďalšími parametrami. ČŠI poukazuje na to, že významnú rolu hrá aj kvalifikovanosť a spokojnosť učiteľa.

Ďalšie materiály pre rodičov sú k dispozícii na [www.indicia.sk/rodicom](http://www.indicia.sk/rodicom).

# DIDAKTICKÉ PROSTREDIA



**Učebnice prof. Hejného sú charakteristické využitím tzv. didaktických prostredí, ktoré napomáhajú efektívne vyučovacieho procesu. Ich aktuálna podoba je výsledkom ôsmich desiatok rokov experimentov a overovaní. Viac o tom, prečo sú v metóde využívané didaktické prostredia, nájdete v ďalšej kapitole tejto brožúry. Teraz si popíšeme zmysel niekoľkých vybraných prostredí a na prostredí Autobus si ukážeme, ako sa také prostredie vyvíja od materskej školy až po 2. stupeň základnej školy.**

**ABAKU – Počtové operácie (spoje) zábavnou formou.**

Prostredie Abaku je inšpirované rovnomennou hrou aj metodikou. Hráči pomocou jednotlivých číslic skladajú matematické úlohy, napr. v reťazci čísl 2 3 6 je možné pomocou základných početných operácií (+, −, ·, :) vytvoriť matematický spoj  $2 \cdot 3 = 6$  alebo v reťazci 1 2 3 4 je možné nájsť rovnosti  $1 + 2 = 3$  alebo aj  $12 : 3 = 4$ . Hlavným cieľom je upevňovanie kalkulatívnych spojov („ľudovo „počtov“, „násobilky“ a pod.). Ich zautomatizovanie deťom v budúcnosti uľahčí prácu v mnohých ďalších kapitolách matematiky. Šetrí to ich energiu na náročnejšie úvahy a výpočty, napr. pri rozširovaní alebo krátení zlomkov. Na rozdiel od nácviku spojov prostredníctvom počítania stĺpčekov je tento spôsob pre deti zábavnejší, a navyše rozvíja ich tvorivosť.

**KROKOVANIE – Porozumenie záporným číslam a absolútnej hodnote.**

Krokovanie je prostredie, ktoré je založené na synchronizácii rytmu pohybového, akustického, slovného. Dieťa sa učí pomocou krokovania sčítať, odčítať, pripravuje sa na lineárne rovnice, sústavy rovníc, absolútnu hodnotu alebo rieši dynamické úlohy (napr. úlohy o veku). Otvára sa mu svet záporných čísel a získava skúsenosti s číselnými výrazmi, napr. mínus pred zátvorkou.

**VLÁČIKY A DEDO LESOŇ – Modelovanie prirodzených čísel (ako veličiny), príprava rovníc a sústav rovníc (alebo ich ekvivalentných úprav), myšlienka substitúcie, práca s premennou.**

Vláčiky modelujú malé prirodzené čísla pomocou svojej dĺžky. Žiaci môžu porovnávať rôzne dlhé farebné hranolčeky (vagóniky) a zisťovať tak vzťahy medzi nimi. Skladaním jednotlivých vagónikov potom žiaci získavajú vláčiky, ktoré medzi sebou porovnávajú.

Dedo Lesoň sa stará o zvieratká: myšky, mačky, husi ... Tie sa rady preťahujú lanom. Všetky myšky sú tu rovnako silné, všetky mačky sú rovnako silné a pod. Porovnávajú sa tak sily jednotlivých družstiev. Sila tohto prostredia spočíva v možnosti dramatizácie – deti sa môžu vžiť lepšie do myši, mačky alebo psa ako do čísel 1, 2 alebo 4, ktoré tieto zvieratá reprezentujú.

Podrobné popisy týchto aj ďalších prostredí a ich vývoja nájdete na [www.indicia.sk/didakticke-prostredia](http://www.indicia.sk/didakticke-prostredia) v podobnej forme, ako je na nasledujúcich stránkach spracované prostredie Autobus.

# AUTOBUS

**Autobus je hra, ktorá využíva deťom známe prostredie, ktorá ich baví a pri ktorej získavajú svoje vlastné skúsenosti. Na nich je možné stavať pri vyučovaní v škole.**

**A**utobus vytvoríme z lepenkovej škatule a ako cestujúci poslúžia hračky alebo vrchnáčiky z PET fliaš. V miestnosti označíme zastávky, napr.: Nástupná, Pri Okne, Pri Skrini a Konečná. Na každej zastávke je jeden výpravca a ešte je tu šofér autobusu. Výpravca na nástupnej zastávke vkladá do autobusu vrchnáčik a hovorí: „Jeden cestujúci nastúpil.“ Potom vloží druhý vrchnáčik a hovorí: „Ďalší cestujúci nastúpil.“ Šofér so škatulou odíde a povie: „Autobus odchádza, prichádza na zastávku Pri Okne.“ Výpravca na zastávke vyberie jeden vrchnáčik a hovorí: „Jeden cestujúci vystúpil.“ Takto šofér obíde všetky zastávky, až príde na konečnú. Koľko cestujúcich vystúpi na konečnej? V prostredí Autobus sa deti stretávajú s počtami ľudí v rôznom kontexte – ako je stav (tí, ktorí sedia v autobuse), zmena (tí, ktorí vy-

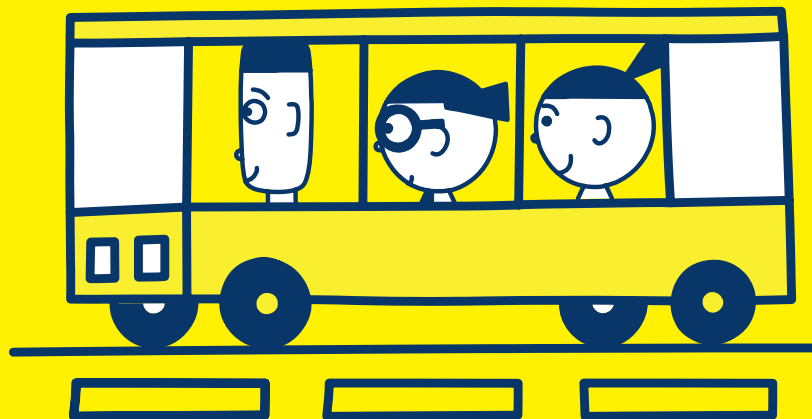
stupujú a nastupujú) a porovnanie (tí, ktorí na zastávke pribudli alebo ubudli).

## Materská škola






Už v predškolskom veku môžeme dieťaťu zadávať úlohy o stave, zmene a porovnaní. Napríklad: Koľko je nás pri stole? Koľko nás bude, keď si prisadne aj mamička? Kto má najviac/najmenej koláčov? Niektorí rodičia a učiteľky hrali Autobus aj s predškolákmi. Ak začali s jednoduchými úlohami (napr. zberný autobus, kde ľudia na zastávkach len pristupujú), s malým počtom zastávok (Nástupná, Pri Okne a Konečná) a malým počtom cestujúcich, hra deti bavila. Postupne možno s deťmi rozširovať počet zastávok aj cestujúcich.

## 1. trieda

S nástupom do školy sa z dieťaťa stáva žiak a Autobus je jedným z prostredí, v ktorých žiak pracuje na hodinách matematiky. Podobne ako v MŠ pripravíme autobus, zastávky a cestujúcich. Rozdelíme roly výpravcov a šoféra autobusu. Začína sa hra. Dieťa si pri hre musí pamätať rad údajov a priebežne počítat. Má k dispozícii papier alebo stierateľnú tabuľku, na ktorú si robí poznámky. Zatiaľ mu stačí urobiť si čiarku, keď cestujúci nastúpi, a prečiarknúť ju, keď cestujúci vystúpi. Po čase položíme „zájernú“ otázku. Napr. Koľko cestujúcich vystúpilo na druhej zastávke? U detí tak vyvoláme potrebu lepšieho záznamu jazdy. Deti svoje záznamy vylepšujú a diskutujú, až po čase vzniká tabuľka.



Tabuľka obsahuje všetky údaje o jazde. Deti sa učia pracovať s údajmi. Poznávajú dôležité informácie, eliminujú informácie nepotrebné, evidujú údaje a organizujú ich tak, aby bolo

					
vystúpili	0	/	//	///	//
nastúpili	//	///	//	/	0

pohodlné s nimi ďalej pracovať a riešiť úlohy. Existuje však otázka, na ktorú im tabuľka priamu odpoveď nedá: „Koľko cestujúcich cestovalo od umývadla k oknu?“ Tento údaj musí dieťa z tabuľky vyvodiť. Výhodnejšie je však rozšíriť tabuľku o riadok „cestovali“. Aj potom však nachádzame otázky na čísla, ktoré nie sú v tabuľke uvedené priamo.






## 2. – 3. trieda

**Úloha 1:** Prekresli hornú tabuľku a prikresli k nej riadok „cestovali“. Odpovedz na otázky:

- Koľko cestujúcich cestovalo autobusom spolu?
- Kedy bolo v autobuse najviac cestujúcich?
- Na ktorej zastávke v autobuse ubudlo/pribudlo najviac cestujúcich?

V prvej etape sme mali zastávky konkrétne pomenované. Teraz sú žiaci už schopní prejsť

k abstraktnejšiemu označeniu zastávok písmenami **A, B, C...** Úlohy sa postupne stávajú náročnejšími a pridávame ďalšie podmienky.

					
vystúpili	0	/	//	///	//
nastúpili	//	///	//	/	0
cestovali					






















## 1. – 3. trieda

**Úloha 2:** Dopln tabuľku, ak vieš, že na zastávke C nastúpilo do autobusu dvakrát viac cestujúcich, ako z neho na zastávke D vystúpilo. Medzi zastávkou B a C cestovalo trikrát viac cestujúcich, ako ich nastúpilo na zastávke D.

	A	B	C	D	E
vystúpili	0	2	1	2	
nastúpili				3	0
cestovali		5			

## 4. – 5. trieda

**Úloha 3:** Dopln tabuľku:

	A	B	C	D	E
vystúpili	0	 	 	  	   
nastúpili					0
cestovali	  	     			
spolu					5

Na zastávke \_\_ nevystúpila žiadna žena. Na zastávke \_\_ nastúpil žiadny muž. Na zastávke \_\_ nastúpilo dvakrát viac mužov, ako ich nastúpilo na zastávke \_\_. Medzi zastávkami \_\_ a \_\_ cestoval spolu rovnaký počet osôb ako medzi zastávkami \_\_ a \_\_.

## 6. – 7. trieda

Úlohu z prostredia „Autobus“ môžeme namiesto tabuľky zadať aj textom. Náročnosť úlohy sa zvyšuje počtom cestujúcich a množstvom údajov, ktoré potrebujeme do tabuľky doplniť. Objavujú sa aj úlohy, kde žiaci nájdu viac riešení.

**Úloha 4:** Autobus šiel zo zastávky A až do E.

Na zastávke A nastúpilo šesť cestujúcich. Na zastávke B vystúpili dvaja. Niekoľko ich nastúpilo. Na zastávke C vystúpilo päť cestujúcich. Nikto nenastúpil. Na zastávke D nikto nevystúpil. Nastúpilo šesť cestujúcich. Na konečnej zastávke E ich vystúpilo sedem.





Vytvorte tabuľku jazdy autobusom a doplňte:

- Na zastávke B nastúpilo \_\_\_\_ cestujúcich.
- Najmenej cestujúcich nastúpilo na zastávke \_\_\_\_.
- Spolu sa viezlo \_\_\_\_\_ cestujúcich.
- Spolu vystúpilo \_\_\_\_ cestujúcich.
- Len jednu zastávku sa viezlo \_\_\_\_\_ cestujúcich.

**Úloha 5:** V tabuľke je zaznamenaná jazda autobusom.

	A	B	C	D	E
vystúpili	0	■ ■	▲ ▲	■	
nastúpili		▲ ▲	■ ■ ■ ■		0
cestovali			▲ ▲ ▲		■ ■ ▲ ▲ ▲

- Doplňte do tabuľky chýbajúce údaje.

>> Didaktické prostredia

- Koľko ľudí spolu cestovalo autobusom? Koľko z nich bolo mužov a koľko žien?
- Na ktorej zastávke do autobusu pribudli cestujúci?
- Na ktorej zastávke v autobuse ubudli muži?

V prostredí autobus sa objavuje harmonogram jazdy. Dokážete z nasledujúcej úlohy rozlúštiť, o čo ide?

A	B	C	D	E

**Úloha 6:** Na obrázku je harmonogram jazdy autobusu. Cestovalo päť ľudí. Pani Ružová nastúpila na zastávke A a vystúpila na zastávke B. Pán Zelený nastúpil na zastávke A a vystúpil na zastávke C. Napíšte, odkiaľ a kam cestovala pani Fialová, pani Modrá a pán Žltý.

## 8. – 9. trieda

V úlohách v rôznych prostrediach sa kladie dôraz na presné porozumenie výrazov „aspoň“, „najviac“, „práve“. Deti tieto typy úloh riešia veľmi často a nemajú s ich porozumením a správnym použitím problému. Príkladom je ďalšia „autobusová“ úloha.

**Úloha 7:** Tabuľka znázorňuje jazdu autobusom zo zastávky A na konečnú E.

	A	B	C	D	E
vystúpili	0	▲ ▲	0	■ ■ ■ ■ ▲	▲ ▲ ▲
nastúpili		0			0
cestovali		■ ▲ ▲			
spolu	3			8	

V poslednom riadku je uvedený počet cestujúcich v autobuse. Vieme, že z C do D cestovalo osem cestujúcich.

- Doplňte tabuľku.
- Koľko žien cestovalo celkovo?
- Koľko žien cestovalo práve jednu zastávku?
- Koľko mužov cestovalo práve jednu zastávku?

V prostredí autobus sa môžu deti stretnúť aj s úlohou, ktorá využíva pri riešení aj zlomky a percentá.

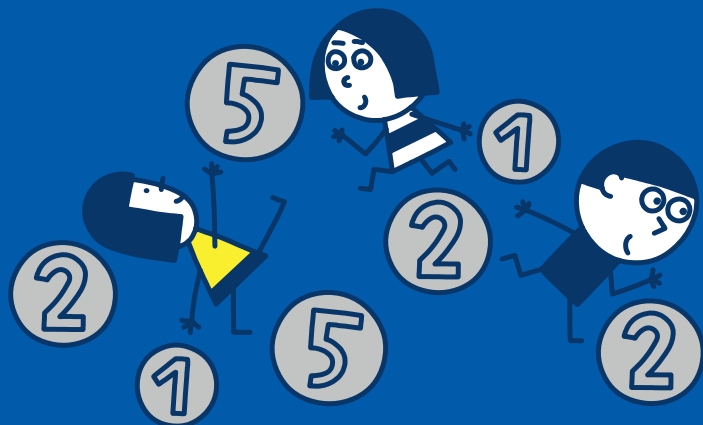
**Úloha 8:** Pozrime sa na dva autobusy.

V prvom bolo 40 miest na sedenie a viezlo sa v ňom 25 mužov a 20 žien. V druhom bolo 60 miest na sedenie a viezlo sa v ňom 34 mužov a 32 žien. Rozhodnite, ktorý autobus bol a) viac „preplnený“, b) viac „mužský“?

Výsledky jednotlivých úloh nájdete na [www.h-mat.cz/dp/autobus](http://www.h-mat.cz/dp/autobus).

# 12 KLÚČOVÝCH PRINCÍPOV

**HEJNÉHO METÓDA** je založená na rešpektovaní 12 základných princípov, ktoré skladá do uceleného konceptu tak, aby deti objavovali matematiku samy a s radosťou. Vychádza z ôsmich desaťročí experimentov a prakticky využíva historické poznatky, ktoré sa v dejinách matematiky objavujú od starovekého Egypta až do dnešných dní.



1. ROLA UČITEĽA – Sprievodca a moderátor diskusií
2. BUDOVANIE SCHÉM – Dieťa vie aj to, čo sme ho neučili
3. PRÁCA V PROSTREDIACH – Učíme sa opakovanou návštevou
4. PRELÍNANIE TÉM – Matematické zákonitosti neizolujeme
5. ROZVOJ OSOBNOSTI – Podporujeme samostatné uvažovanie detí
6. SKUTOČNÁ MOTIVÁCIA – Keď „neviem“ a „chcem vedieť“
7. REÁLNE SKÚSENOSTI – Stavíme na vlastných zážitkoch dieťaťa
8. RADOSŤ Z MATEMATIKY – Výrazne pomáha pri ďalšom učení sa
9. PODPORA SPOLUPRÁCE – Poznatky sa rodia vďaka diskusií
10. VLASTNÝ POZNATOK – Má väčšiu váhu ako ten prevzatý
11. PRÁCA S CHYBOU – Predchádzame zbytočnému strachu u detí
12. PRIMERANÉ VÝZVY – Pre každé dieťa zvlášť podľa jeho úrovne

# 1 ROLA UČITEĽA

*SPRIEVODCA A MODERÁTOR DISKUSÍ*

**Bežná spoločenská predstava učiteľa je obraz niekoho, kto vie, ovláda a prednáša. Učiteľ matematiky ovláda matematiku, preto o nej môže vykladať. Niekedy sa tak aj deje. Dieťa si vypočuje učiteľov výklad, zapíše si nejaké poznámky do zošita, vypočuje si návod na riešenie novej situácie a tento návod sa učí používať.**

**V našom chápaní vyučovania je rola učiteľa aj dieťaťa úplne iná.**



**R**ola učiteľa na hodinách vyučovaných podľa Hejného metódy je náročná, avšak z úplne iného hľadiska, než na aké sme doposiaľ boli zvyknutí.

## Viac radca než autorita

Učiteľ tu nie je autoritou, ktorá vie, pozná a vykladá. On síce vie a pozná, ale nedáva to najavo. Ak niekto niečo vykladá, tak je to žiak. Učiteľ je ten, kto organizuje hodinu, povzbudzuje žiakov k práci, zadáva vhodné úlohy, raduje sa so žiakmi z ich objavov a riadi ich diskusie. Plánuje a realizuje vyučovacie hodiny, v ktorých dáva pozor, aby mal každý prácu. Citlivo reaguje na aktuálnu situáciu medzi žiakmi – individualizuje: znižuje či zvyšuje úroveň náročnosti danej úlohy

podľa toho, ako sa ktorému žiakovi práve darí, umožňuje prácu jednotlivo či v skupinách podľa voľby žiakov. Je tichým sprievodcom jednotlivých hodín matematiky, ale nestáva sa hlavným aktérom týchto hodín.

## Zmena základných rol

Ak učitelia chcú Hejného metódou učiť kvalitne, tak zmena ich roly patrí k najťažším. Je ťažké zvyknúť si na fakt, že po zadaní úlohy o nej diskutujú žiaci. Ich návrhy k postupu riešenia sú často neobvyklé, neúplné či dokonca chybné. Tieto momenty sú však kľúčové pre budúce poznanie žiaka. Práca s chybou tu hrá jednu z najdôležitejších úloh. Učiteľ žiacke návrhy na riešenie nehodnotí. Obracia sa

opäť na kolektív triedy a pýta sa, či s návrhom trieda súhlasí alebo nie, a prečo. Žiaci sa tak učia analyzovať chyby. A to tak chyby vlastné, ako aj chyby spolužiakov. Prostredníctvom chybných riešení sa dostávajú k riešeniu správne. Svoje skúsenosti s matematikou postupne zovšeobecňujú, prehlbujú si svoje poznatky a matematike rozumejú.

Učiteľ však nesmie byť tým, kto sa pokúša žiakovu cestu za poznaním skratiť akoukoľvek vlastnou múdrosťou. Poznanie žiakov by potom dostalo trhlinu. Trhlinu, ktorá sa už nemusí zaceliť a na ktorú žiak následne doplatí v budúcnosti. Akákoľvek skratka, hoci mienená celkom úprimne, vedie k formalizmu, teda k chorobe, keď to vyzerať, že žiak vie, ale vie len dočasne. Vie len do tej miery, dokiaľ si pamätá, čo učiteľ hovoril.

## Učiteľ veľa nevysvetľuje

Počas svojich príprav učiteľ nepremýšľa nad výkladom. Premýšľa nad úlohami, prostredníctvom ktorých pomôže žiakovi, aby porozumel. Pracuje s rôznorodosťou žiakov. Vie, že má v triede žiakov nadaných aj tých slabších. Preto sa učí pripravovať tzv. gradované úlohy, teda úlohy rôznej náročnosti, aby vyhovel všetkým mentálnym skupinám žiakov vo svojej triede. Učí sa nájsť k úlohe v učebnici úlohu menej alebo viac náročnú.

## 2 BUDOVANIE SCHÉM

*DIEŤA VIE AJ TO, ČO SME HO NEUČILI*

Viete, koľko je vo vašom byte okien? Spamäti asi nie, ale ak sa zamyslíte, po chvíli odpoviete. A správne. Pretože máte schému vášho bytu v hlave. Deti majú schémy tiež v hlave. Hejného metóda ich **posilňuje, napája na seba a vyvodzuje z nich všeobecné princípy**. Aj preto si deti skôr uvedomia, že polovica je tiež číslo (0,5), alebo napríklad nemajú problém s inak veľmi „problematickými“ zlomkami.

V bežnom živote aj v matematike sú mentálne schémy hlavným nástrojom rozhodovania, prechádzajú ľudským myslením aj konaním, podieľajú sa na voľbe cieľov a hodnotení. Mnohé zákonitosti vzťahujúce sa k schémam každodenného života sa vzťahujú aj k schémam matematickým.

### Čo je schéma?

Veľmi jednoducho povedané je schéma súhrn navzájom prepojených znalostí týkajúcich sa známeho prostredia. Základnú myšlienku schémy priblížime pomocou jednoduchej ilustrácie.

Ak sa vás niekto spýta na počet dverí alebo kobercov vo vašom byte (dome), len ťažko budete schopní hneď odpovedať. Ale po chvíli odpoviete úplne spoľahlivo. V myslí prejdete všetkými miestnosťami a spočítate príslušné objekty. Obe požadované informácie a mnoho ďalších máte vo svojom vedomí potenciálne uložené ako súbor informácií, ktorým nazývame schéma vášho bytu/domu.

Schéma bytu sa vo vedomí buduje postupne v dôsledku činností, ktoré človek v byte robí. Rovnaké prostredie vnímajú rôzni ľudia rôzne, a teda príslušné schémy v hlavách rôznych ľudí sú odlišné, aj keď prostredie je totožné.



Činnosti prebiehajú v čase, ale schémy sa menia len pozvoľna. Činnosti týkajúce sa bytu, na ktoré zameriame pozornosť (napr. niečo v byte opravujeme), prispievajú k budovaniu schémy bytu viac. Činnosti, pri ktorých je naša pozornosť zameraná na iný objekt ako byt, napríklad na pozeranie televízie, prispievajú k budovaniu schémy bytu menej.

Vo vedomí každého z nás je celá séria schém: schéma nášho obydľia, obce, v ktorej žijeme, budovy, v ktorej pracujeme, nákupného strediska, kam chodíme nakupovať, súboru našich príbuzných, súboru priateľov, súboru kníh v knižnici a pod. Každé z týchto prostredí obsahuje mnoho objektov, rôznych vzťahov alebo podschémy. **Každé prostredie má svoje špecifiká, ale väčšina všeobecnejších objektov, pojmov a vzťahov sa nachádza v mnohých takých prostrediach a ich schémach.** Napríklad vzťah „mať rád“ sa objavuje v schéme medziľudských vzťahov a zároveň aj v schéme bytu, pretože v ňom máme radi určité miesta alebo veci.

V našej metóde sa využívajú napríklad schémy autobusu, krokovania, rodiny a pod., ktoré sme si všetci v detstve sami vytvorili. Deti sú samy schopné pomocou týchto schém objavovať svet a dôjsť k autonómnemu poznaniu. Jedine to má pre nich trvalú hodnotu.

## Matematická schéma

Za prvú matematickú schému považujeme prvé všeobecnejšie poznanie, ktoré vzniklo na základe niekoľkých konkrétnych skúseností a ktoré je obvykle sprevádzané aha efektom.

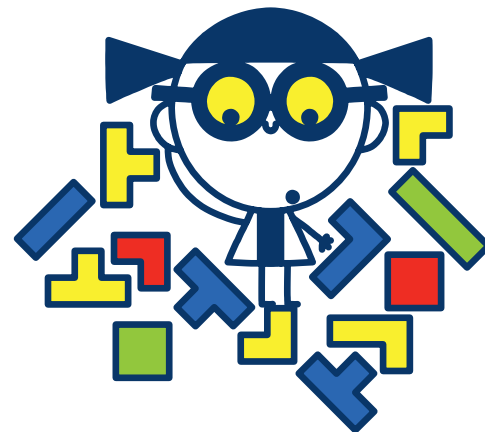
Matematické schémy sú tiež navzájom silne prepojené. Napríklad schéma pojmu racio-

nálne číslo vzniká prepojením schém pojmov prirodzené číslo, zlomok, desatinné číslo a záporné číslo.

Pre vytvorenie presnejšej predstavy schémy sú rozhodujúce okamihy objavenia sa vnútorného rozporu. Napríklad, ak žiak 1. ročníka zistí, že polovica je číslo, alebo ak žiak 4. ročníka objaví, že štvoruholník môže byť aj nekonvexný, alebo že existuje trojuholník, ktorého obvod je ľubovoľne veľký a obsah ľubovoľne malý. V praxi sa vnútorný rozpor objavuje najčastejšie v triede v dôsledku diskusie, v ktorej sa prejavuje rôznosť názorov žiakov.

## Všeobecné vlastnosti schém

1. Schémy sa utvárajú väčšinou spontánne v dôsledku potrieb človeka. Kde potreba chýba, schéma sa nevytvorí.
2. Schéma toho istého sa vo vedomí rôznych ľudí líši. To môže byť príčinou nedorozumenia.
3. Ľudia, ktorí spoločne riešia nejaký problém, môžu vo vzájomnej interakcii dospieť k lepšiemu riešeniu, ako by dospel každý sám. Navyše človek, ktorý má vedomosť o schémach iných ľudí, môže ich znalosti využívať.
4. To nové, čo sa v schéme objaví vo vhodnej chvíli a opakovane, v nej pretrvá dlho.



To, čo sa v nej objaví vo chvíli nevhodnej alebo prichádza len občas, rýchlo zaniká.

5. Časti schémy, ktorú človek používa zriedka, je nutné mať v dostupnej externej pamäti, aby boli v prípade potreby k dispozícii. Externá pamäť uvoľňuje intelektuálnu energiu na náročnejšie úkony.

## Vyučovanie zamerané na budovanie schém

Budovanie schém matematických pojmov, javov, procesov a situácií v mysli každého žiaka je podstatou vyučovacej metódy, ktorá sa usiluje o maximálne autonómny poznávací proces žiaka. Túto vyučovaciu metódu sme pomenovali Vyučovanie orientované na budovanie schém, bežne je známa ako „Hejného metóda“.

## 3 PRÁCA V PROSTREDIACH

### UČÍME SA OPAKOVANOU NÁVŠTEVOU

Ak deti poznajú prostredie, v ktorom sa dobre cítia, nerozptyľujú ich neznáme veci. Úplne sa sústredia len na danú úlohu a neriešia neznámy koncept. Každé zo zhruba 25 použitých prostredí funguje trochu inak (rodina, cesta autobusom, jednoduché krokovanie na ihrisku ...). Systém prostredí je motivačne nastavený tak, aby zachytil všetky štýly učenia sa a fungovania detskej mysle. Tá je potom **motivovaná k ďalším experimentom**.



**P**rostedie obsahuje série na seba naväzujúcich úloh s rovnakým námetom. V úlohách sa vyskytujú rôzne matematické javy. Všetky prostredia ponúkajú úlohy, v ktorých sa prelína niekoľko matematických javov. Úlohy vyzývajú na experimentovanie a na objavovanie.

### Prostredia prispievajú k získaniu neformálnych poznatkov

S každým matematickým javom sa deti stretávajú opakovane v rôznych súvislostiach, v rôznych prostrediach a na rôznej úrovni náročnosti, ktorú je možné nastaviť individuálne

pre každého žiaka. To umožní aszda každému žiakovi nájsť si svoju cestu k dobrému porozumeniu matematických poznatkov.

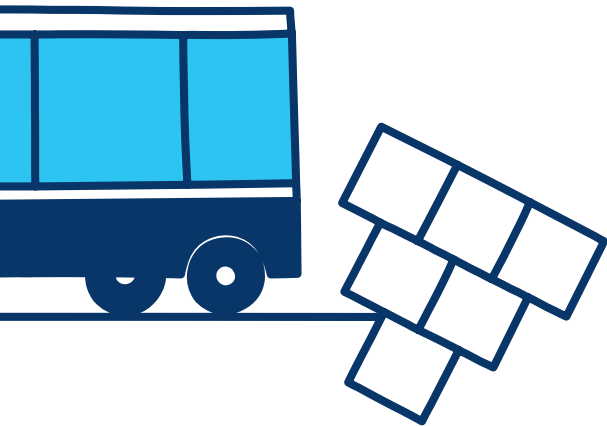
### Námety v prostrediach lákajú

Ďalšou silnou stránkou práce v prostredí je motivácia detí k práci. Námety jednotlivých prostredí sú pre ne väčšinou lákavé. Obvykle majú skôr pocit, že sa hrajú, než že vážne pracujú. Ani nevnímajú, koľko jednotlivých cvičení vyriešia pri svojom experimentovaní. To sa však často nestáva pri riešení klasických „stĺpčekov“, pretože tie obsahujú úlohy podobného typu a slúžia len na precvičovanie pamäte.

Väčšina úloh v našich učebniciach vedie deti k tvorivej činnosti. Deti sú aktívne, a tým majú možnosť prežívať pocit radosti z vlastnej práce. Pestré a rozmanité úlohy primeranej náročnosti sa stávajú pre žiakov výzvou, podnecujú a rozvíjajú chuť niečo riešiť, niečo odhaliť, niečo sa dozvedieť.

### Vychádzajú zo skúsenosti

Niektoré prostredia vychádzajú zo skúseností detí a z bežného života – napríklad krokovanie, schody, rodina, autobus. Iné využívajú u detí obľúbenú činnosť – riešenie rébusov, hlavolamov, doplnovačiek, hranie hier. Naprí-



klad algebrogramy, pavučiny, hady, súčtové trojuholníky, súčinnové štvorce, susedia, zvieratká deda Lesoňa, šípkové grafy, „myslím si číslo“, farebné trojice či neposedné čísla.

Či už prostredie vychádza zo skúsenosti alebo z obľúbenej činnosti, je dôležité, aby bolo deťom dôverne známe, ako napr. stavanie kociek. Azda všetci máme práve s týmto skúsenosť z detstva. Stavanie kociek pritom neskôr môžeme rozvíjať v prostredí stavieb z kociek a využiť túto činnosť napríklad na

rozvoj priestorovej predstavivosti, tvorbu plánov, výpočet povrchu zložitejších telies a pod.

### Znižujú strach z matematiky

S námetmi jednotlivých prostredí sa žiaci zoznamujú v jednoduchých úlohách, postupne potom úlohy gradujú, rozširujú sa a prostredie sa obohacuje. Deti v prostrediach pracujú opakovane, tým sa im prostredie stáva známym, nadobúdajú v ňom istotu, strácajú strach z matematiky, vzájomne diskutujú a korigujú myšlienky.

Veľkou výhodou práce v známom prostredí je jednoduchá a stručná formulácia úloh bez ďalšieho vysvetľovania. Rola učiteľa sa tak presúva z nositeľa múdrosti na predkladateľa vhodných úloh a organizátora práce na hodine. Aktérmi sú žiaci.

### Ukážky prostredí

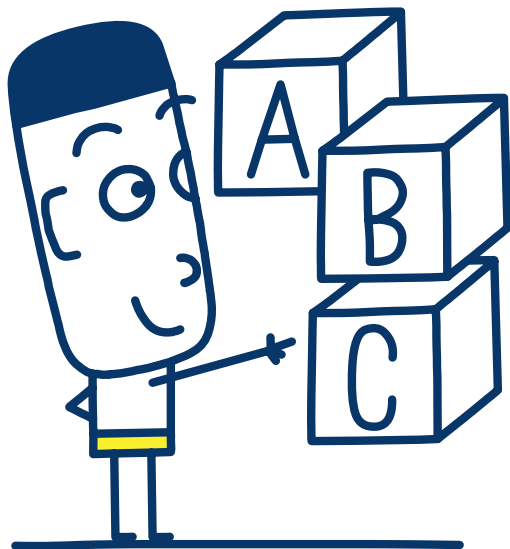
Ukážku vývoja prostredia od materskej školy až po druhý stupeň základných škôl nájdete v tejto brožúre, všetky prostredia sú potom podrobne opísané na [www.indicia.sk/didakticke-prostredia](http://www.indicia.sk/didakticke-prostredia).



## 4 PRELÍNANIE TÉM

### MATEMATICKÉ ZÁKONITOSTI NEIZOLUJEME

**Informácie neodovzdávame dieťaťu samostatne, ale vždy sú uložené v známej schéme – ktorú si dieťa kedykoľvek vybaví. Neoddeľujeme od seba matematické javy a pojmy, ale zapájame pri nich rovnaké stratégie riešenia. Dieťa si potom samo vyberie, čo mu viac vyhovuje a čo mu je prirodzenejšie. Na hodinách tak nebudete počuť to klasické: „Jáááj, pani učiteľka, to sme brali pred dvoma rokmi, to už si nepamätáme...“**



**A**k si jednotlivé témy dávame do súvislostí, ktoré navyše zodpovedajú našim vlastným skúsenostiam, sme schopní si kedykoľvek jednotlivý poznatok odvodiť či ľahko vybaviť. Naopak, ak sa naučíme jednotlivé fakty či pravidlá izolovane bez skutočného porozumenia, nemusíme byť schopní si na ne časom vôbec spomenúť.

### Keď informácie spolu logicky súvisia

Keby sme sa schému nášho bytu učili tak, že v septembri preberieme okná, v októbri kuchyňu, v novembri koberce a v decembri osvetlenie, tak v januári budeme musieť

opakovať všetko, čo sme už o oknách, kuchyni a kobercoch zabudli. Pretože však náš byt poznávame priamo v akcii, v každodenných činnostiach, ktoré sa tiež prelínajú, sme schopní si celý byt aj jeho časti kedykoľvek vybaviť.

Pri týchto činnostiach sme totiž aktívni. Činnosti sa prirodzene prelínajú s rôznymi oblasťami nášho bytu, ktoré prepájajú niekoľko podschémy. Napr. vešanie obrázkov v obývačke je činnosť, ktorá sa prelína s podschémy obývačka a okná. Pred vešaním obrázkov totiž preskúmame, odkiaľ na ne bude dopadať denné svetlo, potom umelé osvetlenie, ďalej ako bude obraz ladiť s ďalšími dekoráciami v byte a pod. Poznáme dobre náš byt, jeho jednotlivé časti, hoci sme sa ich nikdy neučili a nikdy sme nezamerali pozornosť len na ne. Všetky tieto informácie sú uložené v schéme bytu a takmer vždy si ich dokážeme vybaviť, aj keď nám to môže chvíľku trvať.

### Rôzne schémy umožňujú lepšie porozumieť

Podobne je to v našej metóde. V rôznych prostrediach či úlohách spoznávame jednotlivé pojmy, procesy, riešiteľské stratégie, javy, väzby a k ich dobrému porozumeniu dôjde poskladaním čriepkov mozaiky čiastkových poznatkov z jednotlivých prostredí a z rôznych činností.



Uvedieme dva príklady. V prvom ukážeme, ako sa jedna aktivita prelína do mnohých oblastí. V druhom popíšeme, ako mnoho rôznych aktivít prispieva k tvorbe jedného poznatku.

## 1. SKLADANIE PAPIERA

Vo veľmi jednoduchej činnosti, akou je skladanie papiera tvaru štvorca na dva zhodné trojuholníky, využívajú deti svoje skúsenosti na tvorbu:

- geometrických pojmov – štvorec, trojuholník, pravouhlý rovnoramenný trojuholník, uhlopriečka štvorca, vrchol a strana štvorca a trojuholníka, prepona pravouhlého trojuholníka, obsah (štvorec sa dá poskladať z dvoch trojuholníkov);
- geometrických vzťahov – zhodnosť trojuholníkov, štvorec sa dá rozložiť na dva pravouhlé rovnoramenné trojuholníky a opačne, zhodnosť strán štvorca a trojuholníka, uhlopriečka štvorca je dlhšia ako jeho strana;
- aritmetických pojmov – číslo dva, t. j. dva trojuholníky; zlomok ako časť celku, t. j. polovica štvorca.

Deti pri manipulácii a snahe preložiť papier čo najpresnejšie rozvíjajú tiež jemnú motoriku, ktorá sa zúročí neskôr pri konštrukčných úlohách. Toto je podstatná myšlienka úloh ponúkaných deťom v rôznych prostrediach –

riešením úloh dieťa nielen precvičuje svoju kalkulatívnu zručnosť, ale spoznáva aj niečo iné ako to, na čo je úloha zameraná. Každé prostredie prináša do matematiky niečo špecifické.

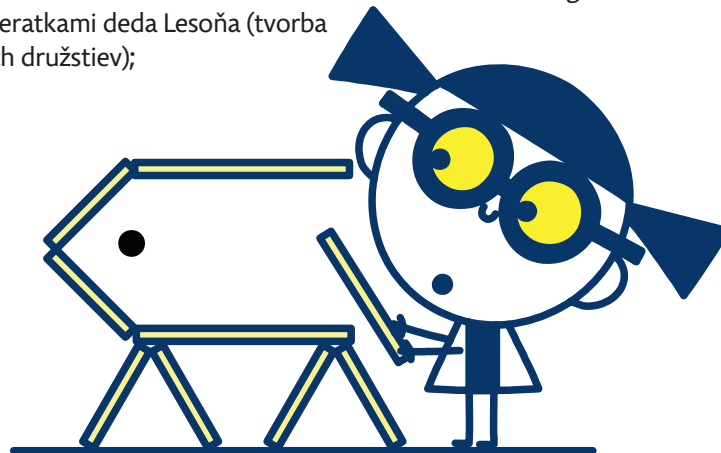
## 2. SČÍTANIE A ODČÍTANIE V RÔZNYCH PROSTREDIACH

Pozrime sa v druhom príklade na sčítanie a odčítanie a možnosti, kde všade môže dieťa tieto jednoduché operácie spoznať:

- v činnostiach v prostredí krokovanie a schody (krokovanie, tleskanie, odriekavanie čísel v rytme krokovania, zapisovanie šípk);
- pri hre a riešení úloh z prostredia autobus (cestujúci nastupujú do a vystupujú z autobusu);
- pri práci so zvieratkami deda Lesoňa (tvorba rovnako silných družstiev);

- v pavučinách a mnohých ďalších prostrediach, kde už hrajú rolu samotné čísla (prostredia štruktúrne);
- v geometrických prostrediach, ktoré na aritmetické operácie nie sú zamerané, ako parkety (voľba parkiet potrebných na pokrytie danej podlahy), drierka (vezmi tri drierka a vytvor trojuholník, vezmi ďalšie dve a vytvor dva trojuholníky), stavby z kociek (postav stavbu tak, aby na prvom podlaží boli tri kocky a v druhom dve) a pod.

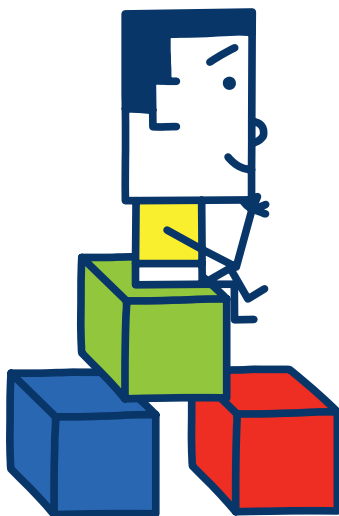
Každé z týchto prostredí prispieva iným spôsobom k porozumeniu pojmu číslo a jednoduchým operáciám sčítania a odčítania. Navyše vytvára podmienky pre rôzne riešiteľské stratégie.



## 5 ROZVOJ OSOBNOSTI

### PODPORUJEME SAMOSTATNÉ UVAŽOVANIE DETÍ

Jednou z hlavných motivácií profesora Hejného pri vytváraní novej metódy bol dôraz na to, aby sa deti nedali v živote manipulovať. Preto učiteľ pri vyučovaní neodovzdáva hotové poznatky, ale učí deti predovšetkým argumentovať, diskutovať a vyhodnocovať. **Deti potom samy vedia, čo je pre ne správne, rešpektujú druhého a vedia sa rozhodovať. Dokonca statočne nesú aj dôsledky svojho konania. Vedľa matematiky prirodzene objavujú tiež základy sociálneho správania sa a mravne rastú.**



### Škola je aj školou života

Škola je prostredím, v ktorom dieťa trávi podstatnú časť svojho života. Má vplyv na jeho psychický aj osobnostný rast. Odohráva sa tu mnoho kľúčových okamihov, preto je také zásadné prispôsobiť vzdelávacie ciele tomuto rozvoju.

Vychádzame z hlbkej znalosti psychiky detí a rešpektujeme potreby i zákonitosti ich vývoja. Snažíme sa dostať do súladu vzdelávanie a výchovu, školské povinnosti a činorodé záujmy dieťaťa, ciele učiteľov a potreby žiakov. Vyučovanie matematiky Hejného metódou tak plnohodnotne využíva poten-

ciál osobnosti žiakov a zároveň podporuje, motivuje a usmerňuje ich rast.

### Od matematickej diskusie k spoločenským postojom

Nové školské prostredie, nároky a požiadavky, ktoré sa na žiakov kladú od začiatku školskej dochádzky, ich vedú k vzájomnej komunikácii a spolupráci. Vedome aj podvedome vzniká potreba spolunáležitosti a solidarity, spoločných postojov a postupov. Školské triedy sú tak miestom, kde vznikajú a kde sa formujú základy sociálneho správania sa a života žiakov.

Hlavným nositeľom školských nárokov a povinností je učiteľ, ktorého rola je pre toto formovanie kľúčová. Často je táto rola dominantná a v niektorých prípadoch až nátlaková. Prirodzenou reakciou kolektívu žiakov je stratégia upnutia sa na autoritu, stratégia prispôbiť sa a prípadne stratégia revolty či odboja. Dlhodobé preferovanie tohto prístupu učiteľa vedie často k deformácii spoločenských postojov a správania sa žiakov. Tie sa budú prenášať do ich života nad rámec školskej dochádzky so všetkými negatívnymi spoločenskými dôsledkami.

Hejného metóda výrazne mení postavenie a úlohu učiteľa a kolektívu žiakov. Učiteľ stráca dominanciu a stáva sa hlavne organizá-

torom duševnej práce detí, ktorá vo veľkom rozsahu prebieha prostredníctvom komunikácie. Tento postup je prínosný pre rozvoj matematického vzdelania a zároveň žiaducim spôsobom rozvíja sociálne kompetencie.

## Ktoré spoločenské zručnosti prináša Hejného metóda?

Deti sú pozorné a vnímavé k svojim spolužiakom. Pri vzájomnom vysvetľovaní sú vedené k tomu, aby sa snažili porozumieť, ako premýšľajú ostatní a prečo došlo k chybe. To vedie k lepšiemu vzájomnému porozumeniu.

Názory a nápady spolužiakov sú využívané na inšpiráciu alebo na rozšírenie vlastných myšlienok. **Vedíme deti k tomu, aby diskutovali kultivovane a vecne.** Spory a omyly využívame na rozvoj celého kolektívu. Deti tak často zazijú, že väčšina nemusí mať vždy pravdu. Podporujeme rôznosť názorov.

Snažíme sa viesť deti k tomu, aby autoritu vnímali ako tvorcu príjemného a tvorivého pracovného prostredia pre aktivity kolektívu a jeho členov.

Deti sú vedené k sebapoznaniu a sebahodnoteniu (napr. pomocou gradovaných testov).



## Vlastnými objavmi ku skutočnej dospelosti

Hejného metóda necháva podstatu tvorivej matematickej práce na dieťaťi. Matematické objavy a úspechy sú výsledkom jeho vlastnej činnosti alebo sa objavujú v rámci jeho komunikácie so spolužiakmi. Žiak si môže sám vo výraznej miere voliť náročnosť a rozsah problémov, ktoré rieši, neskôr napríklad náročnosť domácich úloh alebo písomných prác. Učiteľ jeho prácu neriadi, ale podporuje.

Dôležité je, že tempo, smer a rozsah práce si žiak do veľkej miery určuje sám. To je priaznivé nielen pre budovanie matematického poznania, ale aj pre zachovanie a oživenie možnosti rozvíjať sa a zdokonaľovať. **Hejného metóda sa snaží podporovať neutíchajúcu túžbu po poznaní, túžbu rozvíjať sa,** ktorá býva potlačená s nástupom puberty ignorovaním zmien vnútornej motivácie dieťaťa. Zároveň môže pozitívne ovplyvniť celoživotnú stratégiu dieťaťa.

## Kam smeruje memorovanie

Keď vyučovanie vychádza zo skúsenosti dieťaťa a tieto skúsenosti sú konfrontované s názormi spolužiakov, žiak lepšie vníma obsah učiva. Tiež ho porovnáva so svojimi osobnými názormi a postojmi, teda aj so svojim individuálnym systémom mravných hodnôt.

Naopak vyučovanie založené na mechanickom prepájaní formálnych poznatkov, predstáva a zápisov nevedie dieťa k premýšľaniu nad vlastným rebríčkom mravných hodnôt. Podviesť kamaráta považuje každé dieťa za nemorálne, ale odpisovanie pri ťažkej písomke je prijateľné, lebo jeho cieľom je získať primeranú známku vo svete formálnych vedomostí. To už je totiž svet odtrhnutý od reality. Skutočný život, jeho pravidlá a morálka sa oddeľujú od zvláštneho sveta školských povinností a poznatkov.

## Výchovné ciele sú nadradené poznatkovým cieľom

Školské prostredie je miestom, kde sa najvýraznejšie budujú a rozvíjajú pracovné aj sociálne návyky detí meniacich sa neskôr na dospelých občanov. To, že v našej spoločnosti úroveň znalostí výrazne prevyšuje mravnú úroveň, je omnoho vážnejší problém než vyučovanie matematiky. Naš príklad však ukazuje, že dobré vyučovanie môže aj v tejto oblasti výrazne pomáhať.

## 6 SKUTOČNÁ MOTIVÁCIA

KEĎ „NEVIEM“ A „CHCEM VEDIET“

Všetky matematické úlohy sú v Hejného metóde postavené tak, aby ich riešenie deti „automaticky“ bavilo. Správna motivácia je vnútorná motivácia, nie tá, ktorá prichádza zvonku. Deti prichádzajú na riešenia úloh vďaka svojej vlastnej snahe. **Neokrádame deti o radosť z vlastného úspechu.** Vďaka atmosfére v triedach sa tak kolegiálne tleska všetkým – aj tým, ktorí na daný jav či riešenie prídu neskôr.



**M**otivácia dáva poznávaciemu procesu energiu a orientáciu, a preto hrá kľúčovú rolu v kvalite celého procesu učenia sa. Dieťa s vnútornou potrebou poznávať poznáva intenzívnejšie, hlbšie a komplexnejšie ako to, ktoré je k poznávaniu donútené.

Vtedy už nehovoríme o motivácii, ale o stimulácii. Už z latinského pôvodu slov je zrejmé, aký markantný je rozdiel medzi motiváciou a stimuláciou. Motivácia je odvodená z lat. moveō – hýbať, pohybovať, zatiaľ čo stimulácia z lat. stimulo – bodať ostňom, pichať. Motiváciu teda chápeme ako potrebu poznávať, ktorá pramení z vnútorného boja medzi „neviem“ a „chcem vedieť“, „neviem“ a „chcel by som vedieť“, „neskúsil som“ a „chcel by som skúsiť“.

### Motivácia je vrozená

Dieťa je zvedavé. Má silnú potrebu spoznávať veci, ktoré ho obklopujú. Pýta sa na všetko, čo sa okolo neho mihne. Potrebuje získavať nové a nové skúsenosti, často aj za cenu bolesti – napríklad rozbitých kolien, keď sa učí jazdiť na bicykli. S motiváciou k poznaniu sa teda dieťa už narodí.

## Motivácia dieťaťa a dospelého sa líši

Motivácia dieťaťa sa výrazne líši od motivácie dospelého človeka. Z toho pramenia mnohé nedorozumenia. Motivácia dieťaťa je:

1. **naliehavá** – preto dospelý často považuje naliehavosť potreby dieťaťa za tvrdohlavosť, alebo dokonca drzosť;
2. **roztržitá** – dieťa sa zaujíma o všetko, čo sa ocitne v oblasti jeho pozornosti, motivácia dospelého sa zameriava na určitú vec;
3. **širokospektrálna** – dieťa si tým mapuje svoj vzťah k jednotlivým oblastiam ľudskej činnosti a získava skúsenosti, ktoré mu pomôžu dobre si zvoliť jeho budúce povolanie.

Túžba po školskom poznávaní pramení z predchádzajúcich radostných aha efektov, ktoré žiak zažil už skôr a z rozporu medzi „neviem“ a „potrebujem vedieť“.

## Motivácia vo vyučovaní matematiky

Impulzom na učenie býva často snaha dieťaťa získať dobrú známku alebo strach zo zlej známky. Niekedy snaha zapáčiť sa učiteľovi či ušľachtilá snaha urobiť lepšou známku radosť mamičke. Deti motivované potrebou objavovať matematiku sú skôr výnimkou ako pravidlom.

Hejného metóda ponúka dieťaťu matematiku, ktorá vychádza z jeho skúseností. Ak sa začne hneď od začiatku pohybovať v dôverne známom svete, je neustále motivované postupovať ďalej. Vďaka tejto vnútornej motivácii je potom ochotné „prejsť“ z reálneho sveta aj do sveta abstraktných pojmov, osvojí si isté matematické nástroje a prostredníctvom nich objavuje aj tzv. „vyššiu“ matematiku.



## 7 REÁLNE SKÚSENOSTI

STAVIAME NA VLASTNÝCH ZÁŽITKOCH DIEŤAŤA

Využívame vlastnú skúsenosť dieťaťa, ktorú si samo vybudovalo od prvého dňa svojho života – doma, s rodičmi, pri objavovaní sveta vonku pred domom či na pieskovisku s ostatnými deťmi. **Stavíme na prirodzených konkrétnych skúsenostiach, z ktorých potom dieťa dokáže urobiť všeobecný úsudok. Deti napríklad „šijú šaty“ pre kocku, čím sa automaticky naučia, koľko má kocka stien, koľko vrcholov, ako vypočítať jej povrch...**



**A**zda každý si dokáže predstaviť vývoj dieťaťa, ktoré je najskôr schopné ukázať tri vlastné prsty namiesto troch rôznych predmetov, neskôr namiesto prstov napísať číslicu tri a časom dokonca túto číslicu nahradí písmenom „x“. Ak sme vedení našou vlastnou dôverne známou skúsenosťou, sme ochotní vstúpiť aj do sveta úplnej abstrakcie.

### Matematika ako skúsenosť

Vyučovanie matematiky orientované na budovanie schém vychádza predovšetkým z vlastnej skúsenosti detí. Pri riešení úloh zbierajú deti rôzne matematické skúsenosti. Napríklad ak sa dieťa pokúša spočítať tri lentilky, počíta jeden,

dva, tri a ukazuje na ne. Podobným spôsobom spočíta tri jablká, tri osoby pri stole, tri kroky aj tri tlesknutia. Diskutuje s kamarátom o tom, ako to robí on, až napokon zovšeobecní: „Aha, tri je vždy toľko.“ A ukáže tri prsty.

Prsty sa stávajú generickým modelom. Je to zástupný model všetkých predchádzajúcich skúseností. Dieťa teraz vie, že tri autá je toľko (tri prsty), aj keď autá fyzicky nevidí. Na základe týchto skúseností začína byť dieťa pripravené zapísať trojku číslicou. Tento abstraktný znak prijme a začne ho používať. Dieťa však má pod pojmom „tri“ vybudované jasné číselné predstavy. Abstraktnému pojmu rozumie. Nový poznatok sa následne uloží v už existujúcej štruktúre znalostí v hlave a dieťa ho ďalej používa.

Popísaný poznávací mechanizmus riadi poznávanie vzťahov, pojmov a procesov. Volá sa Teória generického modelu.\* Ak k tejto teórii pridáme metodiku implementácie, dostávame pedagogickú teóriu nazvanú Genetický konštruktivizmus.\*\* Hejného metóda je overenou aplikáciou týchto vedecky prebádaných teórií.

### Matematika v dôverne známych prostrediach

Podobným spôsobom sú v učebniciach koncipované všetky matematické oblasti zabudované

do rôznych prostredí. Tak napr. v prostredí krokovanie žiak zbiera skúsenosti s prirodzenými číslami, celými číslami, mínusom pred zátvorkou, rovnicami aj s absolútnou hodnotou.

Ak potom v štvrtom ročníku dostane úlohu:  $2 - (\_ - 1) = -1$ , môže sa stať, že ju žiak nevie v číslach riešiť. Má však za sebou veľa skúseností s krokováním, ktoré sa tu stane nástrojom (generickým modelom) na riešenie úlohy. Žiak prepíše úlohu do šípkového zápisu:

$|\rightarrow| \text{čelom vzad} | \_\_\_\_\_\_ | \leftarrow | \text{čelom vzad} | = | \leftarrow |$

úlohu odkrokuje a nájde riešenie nasledujúcou predstavou. Krokujú dvaja žiaci, ktorí stoja vedľa seba. Prvý urobí: dva kroky dopredu, čelom vzad, nič, krok dozadu, čelom vzad. Druhý urobí: jeden krok dozadu. Čo urobí prvý, aby stáli vedľa seba?

## Skúsenosť sa dá len získať, nie preniesť

Problém so zbieraním skúseností je však v tom, že skúsenosť sa nedá preniesť. Dá sa jedine získať. Spôsob, akým dieťa získa skúsenosť v matematike, je len jeden – bude riešiť úlohu.

\* Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika, Portál, 2001. Na zakúpenie na [eshop.ucmeradi.sk](http://eshop.ucmeradi.sk).

\*\* Kvasz, L.: Princípy genetického konštruktivismu, Orbis Scholae, 2016. Dostupné online na <https://www.indicia.sk/aktualne-skolenia/hejneho-metoda/metodiky>.

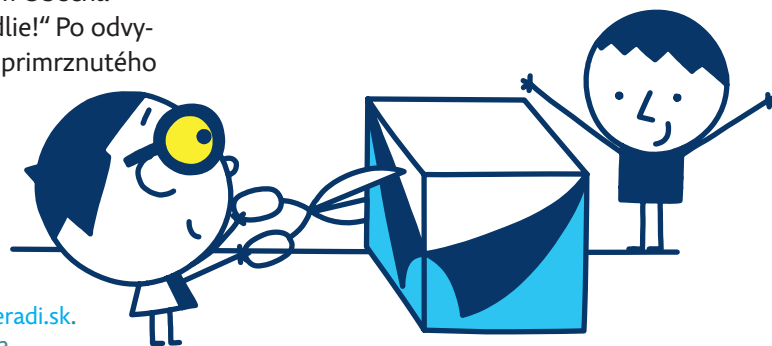
>> 12 kľúčových princípov

Akákoľvek snaha žiakovu cestu za poznaním skrátiť a pokúsiť sa mu „skúsenosť sprostredkovať“ rieši len momentálnu situáciu. Aj keď naše úmysly môžu byť šlachetné, v skutočnosti tým robíme žiakovi medvediu službu. Jeho poznatok je formálny a do jeho hlavy je uložený len krátkodobý. V podstate nejde o poznatok v pravom zmysle slova.

Z vlastných životných skúseností môžeme hodnotiť, nakoľko sú vyššie uvedené slová pravdivé. Stačí si spomenúť, ako často povie mama dieťaťu: „Koľkokrát som ti to hovorila?“ Dieťa si napriek tomu poreže prst, spadne zo stoličky a nečistí si zuby. Je mu celkom ľahostajné, koľkokrát mu to kto povedal. Aby bolo opatrnejšie, musí získať skúsenosť. Teda skutočne si porezať prst a skutočne spadnúť zo stoličky. Spomeňme si na film Obecná škola a vetu: „Neolizujte zábradlie!“ Po odvysielaní filmu sme mali pri plote primrznutého deväťročného chlapca. Musel si to vyskúšať, pretože neveril, že to, čo videl vo filme, je pravda.

## Skúsenosť získame aj pri neúspechu

Naopak výhodou zbierania skúseností je skutočnosť, že žiak ich získa aj vtedy, keď úlohu nevyrieši. Samotný fakt, že úlohu rieši, že akokoľvek mentálne pracuje, je pre žiaka prínosný. Teda žiadna vyučovacia hodina nie je stratená, ak žiak pracuje. Aj vtedy, ak sa práve nedostane k cieľu, získa skúsenosť. Vyskúša si, že tadiaľ cesta nevedie. Ujasní si, čo ešte potrebuje na to, aby úlohu vyriešil. Uvedomí si, že by sa mu hodila napr. znalosť malej násobilky. Podobné situácie sú pre žiakov dôležité, pretože raz ich zúročia.



## 8 RADOŠŤ Z MATEMATIKY

VÝRAZNE POMÁHA PRI ĎALŠOM UČENÍ SA

**Skúsenosti hovoria jasne: tá najúčinnnejšia motivácia prichádza z detského pocitu úspechu, z jeho úprimnej radosti, ako dobre vyriešilo primerane náročnú úlohu. Je to radosť z vlastných pokrokov a z uznania spolužiakov aj učiteľa.**



### Sila vnútornej motivácie

Z každodennej praxe vieme, že deti, u ktorých prevažuje vnútorná motivácia, sú samostatnejšie v myslení a rozhodovaní ako tie, u ktorých prevažuje vonkajšia motivácia. Radosť z premýšľania vzniká pri vlastných objavoch. Matematické prostredia v našich učebniciach sú navrhnuté tak, aby umožňovali objavovať. Rôzne prostredia umožňujú uspieť rôznym typom detí.

Náročnosť úloh je nastavená tak, aby aj slabší žiaci mohli prežiť radosť z úspechu. Dostávajú úlohy s náročnosťou primeranou ich schopnostiam. Slovo primerané je tu veľmi dôležité. Hovorí: úloha musí byť taká ľahká, aby ju žiak vyriešil, a zároveň taká náročná, aby na jej riešenie musel vynaložiť isté úsilie a z jej zvládania mal radosť. Radosť je potom motorom pre ďalšiu prácu a spúšťačom motivácie na riešenie úloh a intelektuálnej práce.

### Ani rast kvetov neurýchlime ich povytáňovaním

Žiak, ktorému sú poznatky odovzdané, alebo dokonca vnútené, žiak, ktorý je vedený k reprodukcii a imitácii získaných poznatkov a ktorému je odopreté nadobúdanie vlastnej skúsenosti, nebude v budúcnosti ochotný ani schopný sa k ďalším poznatkom dopracovať vlastnými silami.

V pamäti si bude skladovať poučky a vzorčky a stane sa z neho „intelektuálny príživník“ (slová ruského psychológa A. M. Maľuščina). Jeho autonómia a potreba poznávať, ktorá je základom motivácie, bude v skutočnosti utlmená. Poznávaci proces dieťaťa sa nedá urýchliť tým, že mu odovzdáme hotové poznatky. Rast kvetov sa tiež nedá urýchliť tým, že ich každé ráno o kúsok povytáhneme zo zeme.

### Radosť žiakov z práce

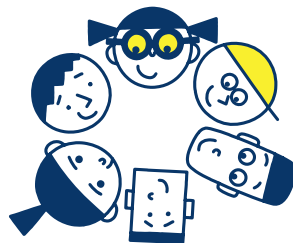
K tomu, aby nedošlo k „bloku z matiky“ a dieťa sa v budúcnosti nezľaklo, keď niekde pri práci alebo v zmluve uvidí matematický výraz, pomôže kladný vzťah k matematike. Ten sa prejavuje pri školskom vyučovaní napríklad tak, že sa žiaci na hodiny matematiky tešia, žiadajú si ďalšie úlohy a aj vo voľnom čase sa rozprávajú medzi sebou, s kamarátmi či s rodičmi o tom, čo sa dialo na hodine.



# 9 PODPORA SPOLUPRÁCE

POZNATKY SA RODIA VĎAKA DISKUSII

**Deti nečakajú, kým sa výsledok objaví na tabuli. Pracujú v skupinkách, po dvojiciach alebo aj samostatne. Každý žiak je tak schopný povedať, ako sa k výsledku dopracoval, a vie to vysvetliť aj druhým. Výsledok sa rodí na základe spolupráce. Učiteľ tu nie je konečnou autoritou, ktorá povie, kde je pravda – a otočí sa ďalší list učebnice.**



## Potreba diskusie

Vzájomné diskusie medzi sebou deti nevyhnutne potrebujú, či už sú vo fáze získavania nového poznatku alebo overovania svojich záverov. V žiacich diskusiách sa totiž objavuje rad rôznych názorov, podnetov, ba aj chybných predstáv, ktoré motivujú dieťa k hľadaniu správneho riešenia. Nie je tu žiadna autorita rozhodujúca o tom, kde je pravda. Dospelý len prihliada a necháva dieťa svoje riešenia formulovať a obhajovať pred ostatnými. Dieťa po celú dobu diskusie neustále zvažuje možnosti a premýšľa. Buduje si tak vlastný plnohodnotný poznatok, ktorý zapadne do jeho už existujúcej štruktúry poznatkov.

## Rola učiteľa

Učiteľ hľadá predovšetkým aktivity, v ktorých je potrebná spolupráca žiakov. Organizuje bežné vyučovacie hodiny tak, aby na každej hodine dostali žiaci priestor na spoluprácu. Rôznorodosť foriem práce je tu dôležitá tak z hľadiska typológie žiakov, ako aj z hľadiska získavania nových poznatkov.

Zámer učiteľa je teda voliť predovšetkým také formy práce, ktoré podporujú interakciu žiakov medzi sebou. Či sa to bude diať vo dvojiciach, trojiciach, väčších skupinách či celotriedne, nie je už rozhodujúce. Zábavnosť hodín je totiž zaisťovaná pestrosťou foriem. Žiadny model sa neopakuje stále dokola a žiadna forma práce z dlhodobého hľadiska nezostáva v pozadí.

## Žiadne bariéry medzi žiakmi

Niektorí učitelia na bežnej hodine volia prístup, pri ktorom po zadaní úlohy starostlivo dbajú na zákaz odpisovania. Za snahu o vzájomnú konzultáciu bývajú žiaci trestaní, a stavajú si tak medzi sebou bariéry. Pri vyučovaní Hejného metódou o žiadne bariéry medzi žiakmi rozhodne nestojíme. Naopak je tu dôležité akékoľvek podobné bariéry búrať, aby komunikácia medzi žiakmi plynula prirodzene, kultivovane, vecne a bez zakopnutia.

Väčšina poznatkov sa v hlavách detí rodí na základe skúseností a vzájomnej diskusie. Preto deti potrebujú mať priestor na vzájomnú spoluprácu a diskusiu priamo na hodinách. Táto komunikácia sa totiž ukazuje ako vysoko efektívna.

## Voľby formy práce

Každé dieťa je iné, preto rôznym deťom vyhovuje aj rôzna forma práce. Niektorí radi pracujú samostatne, iným sa lepšie darí pri práci v skupine. Vôbec teda nie je na škodu, keď má dieťa po zadaní úlohy možnosť voľby. Nieкто sa do toho pustí sám. Komu viac vyhovuje spolupráca, nájde si kamaráta. Avšak aj tí, ktorí preferujú samostatnú prácu, svoje dielo následne s veľkou chuťou prediskutujú so spolužiakom.

## 10 VLASTNÝ POZNATOK

*MÁ VÄČŠIU VÁHU AKO TEN PREVZATÝ*

**Keď má prvák poskladať z drevok štvorec, vezme jedno drevko, potom druhé, tretie ... Stále mu to nestačí, vezme teda štvrté drevko a poskladá štvorec. Potom sa rozhodne poskladať väčší štvorec. Vezme ďalšie drevka a zloží väčší štvorec. Už začína tušiť, že ak bude chcieť zložiť ešte väčší štvorec, potrebuje k tomu vždy ďalšie štyri drevka. Je na ceste k objaveniu vzorca na výpočet obvodu štvorca.**



**N**aše učebnice sú koncipované inak, ako je obvyklé. Sú stavané na presvedčení, že poznatok získaný vlastnou úvahou je kvalitnejší ako poznatok prevzatý. Matematiku podľa nich žiak objavuje. Cesta k objavu ide od skúsenosti k pojmu. Žiak zbiera celý rad skúseností, o ktorých hovorí. Konzultuje svoje skúsenosti so spolužiakom a vysvetľuje mu svoje teórie, ktoré si následne overuje na ďalších úlohách. Ale predovšetkým rozumie tomu, čo robí.

### Malí aj veľkí „Pytagorovia“

Keď pracuje dieťa s drevkami pri skladaní rôzne veľkých štvorcov, prirodzene objavuje vzorec pre výpočet obvodu štvorca. No dobre, povie si čitateľ, tu je cesta k objavu zrejماً, ale čo „vyššia“ matematika?

V piatom ročníku má žiak za sebou krájanie pizze na rôzne časti, strihanie papiera, skladanie rôznych častí do koláča, kruhu, čokolády a série úloh na podobné témy. Nikdy mu nikto nepovedal, ako sa vypočíta časť z celku. Napriek tomu bezpečne vie, koľko minút je štvrtina, tretina, pätina, dve pätiny z hodiny. Vie rovnako vypočítať časť z celku, ako aj celok z časti, a to v rôznych situáciách.

Dostane teda úlohu, v ktorej má zistiť, koľko je  $1/2 + 2/5$ . Na pomoc si môže vziať napríklad ciferník. Dieťa vie, že jedna polovica hodiny je tridsať minút. Vie vypočítať, že päťna hodiny je 12 minút, teda dve pätiny hodiny sú 24 minút. 24 minút + 30 minút je 54 minút. Zapiše  $1/2 + 2/5 = 54/60$ . Čísla vo výslednom zlomku sa mu zdajú veľké, a tak ich „zmenší“. Napríklad na polovicu. Vyjde mu  $27/30$ . Aj tu sa dajú čísla ešte zmenšiť na  $9/10$ .

Podobne rieši ďalšie úlohy, eviduje výsledky a nájde fintu. Pri vytváraní všeobecného matematického vzorca samo objavuje „Pytagorove vety“. Nieкто svoju „vetu“ nájde v piatom ročníku. Iný na druhom stupni ZŠ a ďalší ju nenájde vôbec. Ten si ju dá vysvetliť od kamaráta. Premýšľa o nej a prevezme ju. Všetci traja však objavujú cestu nielen k sčítaniu či kráteniu zlomkov, ale k matematickým zákonitostiam. Ale predovšetkým vidia zmysluplnosť svojho konania. Aj títo žiaci časom prevedú už zmienené zlomky na spoločného menovateľa. Zároveň však chápu, prečo to robia a prečo veci fungujú práve takto. Ich poznanie je trvalé.

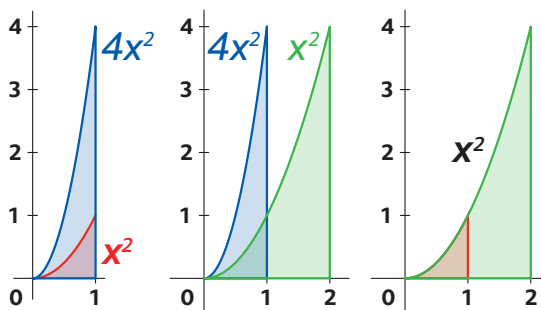
## Objaviť sa dajú aj integrály

Akým spôsobom však stredoškolskí študenti objavujú napríklad integrály? Ľudia, ktorí sa pýtajú, majú väčšinou na mysli integrály

>> 12 kľúčových princípov

v zmysle, ako sa o nich učili v škole. Zodpovedá to často Weierstrassovmu prístupu k integrálnemu počtu. Tu sa buduje teória založená na prísnych logických princípoch – využíva sa na to tzv. „epsilon-delta“ definícia.

Naším zámerom je využiť názornejšie a intuitívne bližšie prístupy, napríklad **Cavalieriho princíp**. Tento princíp sa najskôr objaví pri počítaní obsahov trojuholníkov a objemov telies. Neskôr sa dá vďaka nemu experimentovať s obsahmi krivočiarych útvarov určených parabolou, vodorovnou priamkou a zvislou priamkou (presnejšie priamkami rovnobežnými so súradnicovými osami, ide teda o akési „trojuholníky s prehnutou stranou“). Študenti napríklad zistia, koľkokrát je modrý útvar väčší než červený. Potom zistia, koľkokrát je zelený útvar väčší ako modrý. Tým objavujú pomer obsahov červeného a zeleného útvaru.



Pomocou ďalších vhodne zvolených experimentov študenti objavujú trik na spočítanie týchto obsahov. Rovnakým trikom sa dá potom objaviť metóda na spočítanie plochy pod mnohými ďalšími krivkami a nakoniec pod ľubovoľným polynómom. To je v podstate to isté, čo urobil Cavalieri približne dve storočia pred Weierstrassom. Objavovaním týchto metód budú študenti rozumieť myšlienkam, ktoré stáli pri zrode integrálneho počtu.

## Vlastnou úvahou k prijatiu konvencií

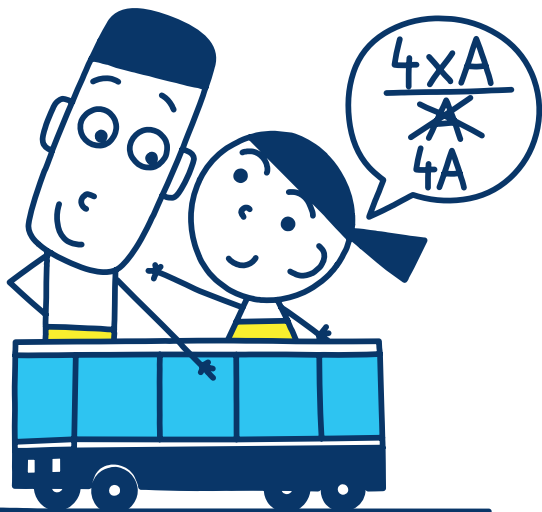
Vďaka vlastným skúsenostiam a logickej úvahe je dieťa pripravené prijať tiež matematický jazyk. Konvenciu, ktorá je všeobecne používaná. „Aha!“ oznámi druhák po sérii diskutovaných skúseností s malou násobilkou: „Keď chcem vedieť, koľko koliesok je na štyroch trojkolkách, nemusím písať  $3 + 3 + 3 + 3$ . Stačí mi znamienko krát!“ Taký žiak rozumie operácii násobenia a akceptuje matematický jazyk. Je na seba hrdý. A teší sa na ďalšie úlohy. Cestu k objavu v matematike je možné zhrnúť do modelu:



# 11 PRÁCA S CHYBOU

*PREDCHÁDZAME ZBYTOČNÉMU STRACHU U DETÍ*

**Dieťa, ktoré by malo zakázané padať, by sa nikdy nenaučilo chodiť. Analýza chyby vedie k hlbšej skúsenosti, vďaka ktorej si deti ďaleko lepšie pamätajú dané poznatky. Chyby využívame ako prostriedok na učenie sa. Podporujeme deti, aby si chyby našli samy, a učíme ich vysvetľovať, prečo chybu urobili. Vzájomná dôvera medzi dieťaťom a učiteľom potom podporuje radosť žiakov z vykonanej práce.**



Chyba pri akejkoľvek ľudskej činnosti je prirodzený jav, najmä ak sa človek túto činnosť len učí. Ak je s chybou dobre naložený, je vítaným spoločníkom na ceste k porozumeniu. Ak si človek uvedomí, že sa chyby dopustil, a ak navyše zistí, prečo k tomu došlo, zdokonalí sa jeho schopnosť robiť nabudúce danú činnosť lepšie.

Za chybu sa v procese učenia nehneváme, ale obhajujeme ju, a dokonca ju vítame. Vítame chybu ako sprostredkovateľa žiakovo skutočného poznania. Prihovárame sa za to, aby sa v našom vyučovaní (nielen v matematike) zakorenila stará múdrosť, že „chybami sa človek učí“.

## **Ked' má aj učiteľ strach z chýb**

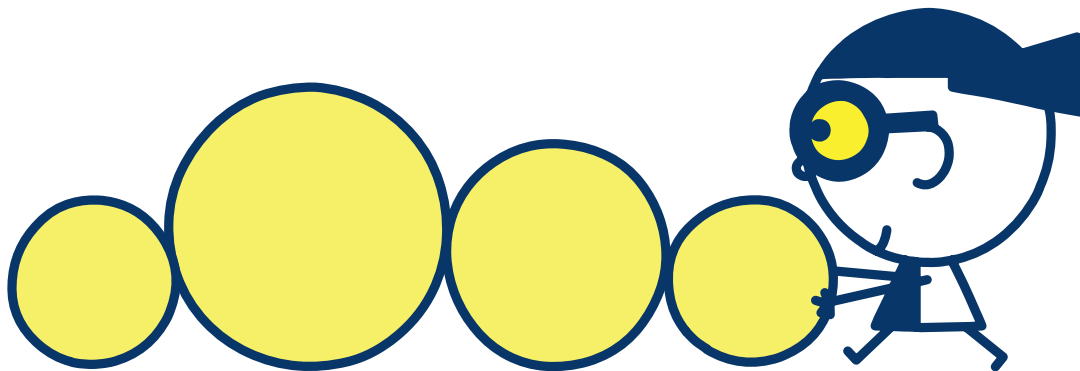
Často sa na chybu pozerá ako na nežiaduci jav. Sám učiteľ má často strach, aby sa chyby nedopustil. Cíti zodpovednosť aj za prípadnú chybu žiaka (či už v zošite, alebo na tabuli), preto na chybu žiaka rýchlo upozorňuje a ihneď ju opravuje.

Rodičovská komunita, ktorá tiež chybu považuje za nežiaduci jav, zvyšuje učiteľov strach z potenciálnej chyby. V rozhovoroch učiteľov častejšie počujeme o chybách, ako o tom, aké sú ich príčiny a ako ich odstraňovať.

## **Chyba aktivuje myslenie**

Učiteľ, ktorý učí inštruktívne, vyžaduje od žiaka prevažne opakovanie predvedených postupov a vyslovených poučiek. Potom často považuje za chybu všetko, čo sa nezhoduje s tým, čo očakáva. To má zhubný vplyv na rozvoj samostatného myslenia žiaka.

Ak učiteľ vníma chybu ako nežiaduci jav, vytvára takú klímu, ktorá žiaka blokuje. Ten zo strachu pred chybou radšej nerobí nič. A učiteľ pre odstránenie chyby žiaka robí len to, že naňho vyvíja tlak. Niektorí učitelia dokonca veria, že primeraný a spravodlivý trest povzbudí žiakovo úsilie učiť sa a bude viesť k zlepšeniu jeho študijných výsledkov.



Avšak realita toto očakávanie učiteľa nepotvrďuje. Je pravda, že žiaci zo strachu vynakladajú na daný predmet viac energie, ale jej značná časť je zmarená. Žiak totiž vyvíja skôr aktivity zameranú na ochranu pred trestom: simulovanie choroby, odpisovanie, klamstvo, absencie či vymýšľanie výhovoriek.

### Neodhaľujeme chyby, ale ich príčiny

Ak sa žiak dopustí chyby, napríklad pri počítaní, obvykle učiteľovi nie je hneď jasné, kde chyba vznikla. Keď učiteľ žiaka len opraví, veľmi mu nepomôže. To podstatné, prečo chyba vznikla, sa žiak nedozvie.

Ak sa učiteľ nesnaží pochopiť príčinu chyby, je učiteľova oprava chyby vnímaná žiakom len mocensky. Žiak nevie, kde je v jeho úvahách chyba, a prirodzene sa tejto chyby dopustí aj nabadúce.

Chyba nesmie žiaka odradiť. Chyba môže a mala by byť pre žiaka užitočnou skúsenosťou. Úlohou učiteľa je pomôcť žiakovi poučiť sa z chýb. Učiteľ, ktorý žiaka za chybu kára, mu poznávanie nových vecí neuľahčuje.

### Ako jednoducho pracovať s chybou

Ak sa žiak bojí svojej chyby, povzbudí ho učiteľ vlastným príkladom: ukáže, ako sa on sám mýlil a ako hľadal príčinu svojho omylu. Kedykoľvek je učiteľ žiakom upozornený na

chybu, poďakuje za opravu a vysloví žiakovi uznanie. Účinné je, keď učiteľ svoju chybu pred žiakmi nahlas analyzuje. Žiaci vidia, ako sa dá k chybe postaviť, a také príklady priťahujú.

V intelektuálnej oblasti je poznanie príčin chyby účinný spôsob prenikania k podstate skúmaného javu. To sa netýka len žiakov v škole, ale aj slávnych matematikov. Aj oni sa dopúšťali chýb a zakaždým bolo odhalenie chyby dôležitým poučením.

### Vďaka chybe doplníme chýbajúce skúsenosti

Ak učiteľ vie, ako pracovať s chybou žiaka, môže každú situáciu, v ktorej sa chyba objaví, didakticky využiť. Učiteľova znalosť má dve zložky: diagnostickú a edukačnú. V rámci diagnostickej zložky sa zisťuje, do akej miery si žiak prítomnosť chyby uvedomuje a či vie, kde sa nachádza. Edukačná zložka potom zahŕňa nápravu vzniknutého problému. Ak sme zistili, že žiak niečomu nerozumie, umožňujeme mu doplniť si chýbajúce skúsenosti.

## 12 PRIMERANÉ VÝZVY

PRE KAŽDÉ DIEŤA ZVLÁŠŤ PODĽA JEHO ÚROVNE

Naše učebnice obsahujú úlohy všetkých obťažností. Tým, že slabší žiaci vždy nejaké úlohy vyriešia, **predchádzame pocitom úzkosti a hrôzy** z ďalších hodín matematiky.

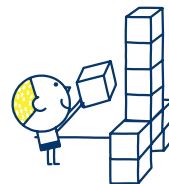
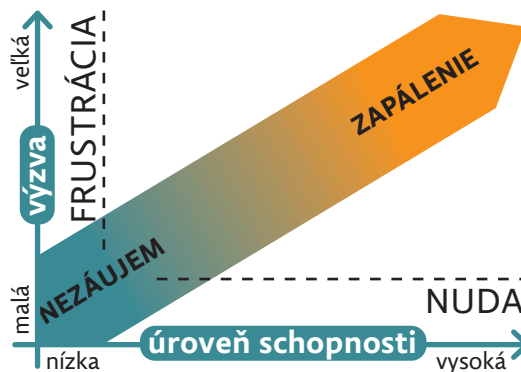
Tým najlepším žiakom zároveň neustále predkladáme ďalšie výzvy, aby sa nenudili. Učiteľ ich nepreťažuje úlohami, ale zadáva také, aby deti neustále motivoval. Rozdeľuje úlohy v rámci triedy podľa toho, čo ktoré dieťa potrebuje.

Úlohy v našich učebniciach sú často odstupňované podľa náročnosti. Ak má úloha časti a) až f), je naším zámerom, aby časť a) vyriešili bez pomoci spolužiakov všetci, naopak e) a f) možno len traja alebo aj jediné dieťa v triede. Podstatné je, že každý má pred sebou primerané výzvy. Tým, že každý niečo vyrieši, predchádzame pocitom úzkosti až hrôzy. Zároveň aj najlepší žiaci stoja neustále pred výzvou, nenudia sa. Zmenšenie strachu a nudy z hodín matematiky je pre nás prioritou.

### Pre slabších aj šikovnejších

Šikovnejší žiaci dospievajú k mnohým objavom a môže sa zdať, že menej nadaní majú smolu. Tu potom hrá veľmi dôležitú rolu učiteľ. Dobrý učiteľ spozná, že pre slabšieho žiaka môže byť

objavom to, čo je ostatným jasné, a za objav mu vysloví uznanie. Vyjadrovaním uznania za originálne myšlienky a nápady (vrátane mylných) učiteľ vlastne hovorí, že matematika je o samostatnom premýšľaní, nie o opakovaní alebo o napodobňovaní cudzích myšlienok.



Veľkú pozornosť venujeme nadaným žiakom. Nechať ich nudiť sa by sme považovali za mrhanie ich potenciálom, ale aj potenciálom celej spoločnosti. Je pre nás dôležité, aby nachádzali v našich učebniciach výzvy a neustále vyvíjali náročnú intelektuálnu činnosť.

### Rešpektujeme vývojové fázy dieťaťa

Riadime sa poznatkami psychológov, aby naše učebnice obsahovali vždy len primerané skoky v náročnosti úloh. Pre deti býva často ťažké niečo, čo je pre dospelých úplnou samozrejmosťou. Príkladom je riešenie slovných úloh pomocou rovnice s neznámou. Rozhodnutie pracovať s neznámym číslom vyžaduje veľkú odvalu a dieťa býva schopné urobiť ho až po získaní viacerých skúseností.

### Zdravé sebahodnotenie

Na účely hodnotenia odporúčame učiteľom tvoriť tzv. gradované testy, ktoré obsahujú podobné úlohy rôznej náročnosti (napr. tri úlohy z jedného prostredia označené ako ľahšia, stredná, ťažká). Deti si podľa svojho uváženia vyberú primerane náročnú úlohu. To ich vedie k sebahodnoteniu. Naším cieľom je komplexne rozvíjať osobnosť každého dieťaťa.

# MATEMÁG

Edukačná hra pre deti



Dostupná na [www.matemag.sk](http://www.matemag.sk)

## **ZÁŽITKOVÁ HRA, V KTOREJ DETI OBJAVUJÚ MATEMATIKU ZÁBAVNOU FORMOU**

Na deti v dabovanej hre čaká pútavý príbeh dvoch detských hrdinov Jakuba a Terezky, ktorí sa vydávajú na putovanie čarovnou krajinou Abima za čarodejníkom Matemágom.

## **PRIRODZENÉ A HRÁVÉ POZNÁVANIE**

Na svojej rozprávkovej ceste deti samy objavujú matiku ako nástroj, ktorý im pomáha prekonávať prekážky. Hra je doplnkom školského vyučovania matematiky v domácom prostredí. Pomáha budovať u detí matematické schopnosti a predstavy.

## **PRE DETI VO VEKU 5 - 9 ROKOV**

Hra bola pôvodne navrhnutá pre deti 1. - 3. ročníkov ZŠ. Užiť si ju však môžu bez problémov aj predškoláci. Hra obsahuje zadania úloh, ktoré zvládnu aj mladšie deti, a vďaka slovenskému dabingu hry nie je potrebné, aby dieťa vedelo čítať.

## **INDIVIDUALIZOVANÉ VZDELÁVANIE**

Každý človek je jedinečný, preto je hra navrhnutá tak, aby sama automaticky prispôbovala svoju náročnosť. Individuálne, podľa pokrokov každého hráča. Každé dieťa tak v hre môže objavovať matematiku svojím vlastným tempom.

## **RODIČIA A DETI**

Matemág podporuje rodičov v ich dôležitej úlohe. Po zadaní e-mailu rodič dostáva priebežne informácie o tom, ako sa s deťmi vyhrať s matematikou nielen v hre, ale aj doma a vonku.

## **POSTAVENÉ NA HEJNÉHO METÓDE**

Hra je založená na princípoch Hejného metódy. Bola vyvinutá v spolupráci s odborníkmi na didaktiku a autorom metódy prof. Milanom Hejným.



# HEJNÉHO METÓDA – zaslúžená radosť z poznávania



Hejného metóda sa vyvíja od 40. rokov 20. storočia, keď Vít Hejný začal skúmať, prečo deti, ktoré bez problémov riešia úlohy z učebníc, zlyhávajú pri riešení neštandardných úloh. Pritom by na ich vyriešenie nemali potrebovať žiadne zvláštne znalosti. Po desiatkach rokov skúmania a overovania poznatkov vyvinul Vít Hejný spolu so svojim synom Milanom metódu, ktorá je namiesto formálnych znalostí vzorcov zameraná na budovanie mentálnych schém. Metóda sa opiera o prepracované didaktické prostredia a rolu učiteľa ako sprievodcu a moderátora diskusií detí pri riešení úloh. V metóde sú výchovné ciele dôležitejšie ako ciele poznatkové, pretože autori sú presvedčení, že kvalitu spoločnosti viac určuje morálna úroveň ako úroveň vedomostná.

Viac na [www.indicia.sk/hejneho-metoda](http://www.indicia.sk/hejneho-metoda).

## Organizujeme KURZY A KONFERENCIE

Ak vás Hejného metóda vyučovania matematiky zaujala a chcete sa dozvedieť viac, môžete si vybrať zo širokej ponuky vzdelávacích podujatí. Kurzy a konferencie sú určené nielen učiteľom, ale odporúčame ich aj rodičom študentov či študentom pedagogických fakúlt.

[www.indicia.sk/hm](http://www.indicia.sk/hm)

## Poskytujeme METODICKÚ PODPORU

Na našom webe nájdete tematicko výchovno-vzdelávacie plány k učebniciam podľa Hejného metódy, a tiež aj odkazy na praktické šablóny či matematické pesničky. Nechýbajú ani típy na odborné a vedecké články týkajúce sa Hejného metódy.

[www.indicia.sk/hm](http://www.indicia.sk/hm)

## Ponúkame UČEBNICE A POMÔCKY

Prostredníctvom nášho eshopu si môžete zakúpiť učebnice a pracovné zošity k Hejného metóde v slovenčine. Okrem tlačenej a elektronickej učebnice máme v ponuke aj širokú škálu praktických učebných pomôcok určených na vyučovanie matematiky Hejného metódou.

[eshop.ucmeradi.sk](http://eshop.ucmeradi.sk)

## Rozširujeme KONŠTRUKTIVISTICKÉ VZDELÁVANIE

Inovácie a konštruktivistický prístup vo vzdelávaní sa usilujeme zavádzať aj v ostatných predmetoch, nielen v matematike. Zastrešujeme projekty zamerané na informatiku (Informatika s Emilom), prírodné vedy (ExpEdícia) a spoločenské vedy (Civilizácia).

[www.indicia.sk/hm](http://www.indicia.sk/hm)