A binomiális együtthatók tulajdonsági
(Vlastnosti kombinačných čísel)

n elem k-ad osztályú kombinációit általában $C_k(n)$ alakban használjuk. Viszont amikor ezekre az értékekre egyéb összefüggésekben, számításokban (pl. binomiális tétel) van szükség, más jelölést szoktunk használni. A másik alak rövidebb nevet kapott, mint az n elem k-ad osztályú kombinációi.

binomiális együttható (kombinačné číslo) – $\binom{n}{k}$ „n alatt a k" (n nad k)

T.

a, $\binom{n}{0} = 1$

egy n elemű halmazból csak egy üres részhalmazt (triviális részhalmaz) tudunk alkotni – csak egy üres halmaz létezik

b, $\binom{n}{1} = n$

egy n elemű halmazból pontosan n darab egyelemű részhalmazt tudunk létrehozni – minden elem, mint egy következő részhalmaz eleme

c, $\binom{n}{n} = 1$

egy n elemű halmazból csak egy részhalmaz alkotható az alaphalmaz összes n elemével (triviális részhalmaz)

d, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

egy n elemű halmazból pontosan annyi k elemű részhalmaz hozható létre, amennyi $(n-k)$ elemű – ha kiválasztok az n elemből k darabot, a kiegészítőhalmazban pontosan $(n-k)$ elem → mindegyik létrehozott új részhalmazzal új kiegészítőhalmaz is keletkezik

e, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

B.

$$\binom{n}{0} = C_0(n) = \frac{n!}{0!.(n-0)!} = \frac{n!}{1.n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = C_1(n) = \frac{n!}{1!.(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{1.(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = C_n(n) = \frac{n!}{n!.(n-n)!} = \frac{n!}{n!.0!} = \frac{1}{1} = 1$$

B: $\binom{n}{k} = C_k(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

J: $\binom{n}{n-k} = C_{n-k}(n) = \frac{n!}{(n-k)!.[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!.[n-n+k]!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$

B = J

B: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = C_k(n) + C_{k+1}(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!.[n-(k+1)]!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!.[n-k-1]!} =$

$= \frac{n!}{k!.(n-k).(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1).k!.(n-k-1)!} = \frac{n!.(n-k)+n!.(k+1)}{(k+1).k!.(n-k).(n-k-1)!} = \frac{n!.n-n!.k+n!.k+n!.1}{(k+1)!.(n-k)!} = \frac{n!.n+n!.1}{(k+1)!.(n-k)!} =$

$= \frac{n!.(n+1)}{(k+1)!.(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.(n-k)!}$

J: $\binom{n+1}{k+1} = C_{k+1}(n+1) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.[(n+1)-(k+1)]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.[n+1-k-1]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.(n-k)!}$

B = J

Egy tetszőleges n elemű halmazból képezhetünk különböző elemszámú részhalmazokat: a nullelemű részhalmaztól (üres halmaz) az összes elemből álló részhalmazig terjedően – n elemű részhalmaz. Ez azt jelenti, hogy a binomiális együtthatók egy konkrét n érték esetén $\binom{n}{0}$-tól $\binom{n}{n}$-ig terjednek.

Ezeket a számokat háromszögbe rendezzük úgy, hogy minden sorában egy adott n értékhez tartozó binomiális együtthatók legyenek – a k szerint sorba rendezve. A sorok az n értéke szerint rendezettek – minden következő sor egyel több binomiális együtthatóból áll. És a számokat a következő sorban úgy írjuk, hogy az előző sor számai közrevegyék. Ekkor megkapjuk az úgynevezett ***Pascal-féle háromszög***et:

n = 0 $\binom{0}{0}$

n = 1 $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

n = 2 $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

n = 3 $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

n = 4 $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

n = 5 $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

n = 6 $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Számíthatnánk az összes binomiális együtthatót képlet szerint (n elem k-ad osztályú kombinációi), de van erre egy egyszerűbb módszer – alkalmazzuk a binomiális együtthatókra vonatkozó tételeket. Mit jelentenek ezek az összefüggések:

T: a, mindegyik sor az 1 számmal kezdődik

T: b, mindegyik sorban a második helyre az n szám kerül

T: c, mindegyik sor az 1 számmal végződik

T: d, mindegyik sorban a számok szimmetrikusan helyezkednek el – a szélétől haladva megegyeznek (a b, tételből ⇒ az utolsó előtti szám ismét az n)

T: e, ha egy soban összeadunk két egymást követő számot, megkapjuk a következő sorból a két szám közé eső értéket

Elegendő csak három tételt alkalmazni az ötből – az a,; b,; és az e, tételeket. Ha az első és az utolsó helyre egyeseket írok, a többi számot a sorban megkapom az előző sor szomszédos számainak összeadásával.

n = 0 1

n = 1 1 1

n = 2 1 2 1

n = 3 1 3 3 1

n = 4 1 4 6 4 1

n = 5 1 5 10 10 5 1

n = 6 1 6 15 20 15 6 1

n = 7 1 7 21 35 35 21 7 1

n = 8 1 8 28 56 70 56 28 8 1

n = 9 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

n = 10 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

példa:

Számítsuk ki:

a, $\binom{10}{4}$ b, $\binom{11}{4}+\binom{11}{6}$ c, $\binom{9}{3}+\binom{9}{2}+\binom{10}{6}$

$\binom{10}{4} = C_4(10) = \frac{10!}{4!.6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.6!} = 10.3.7 = 210$

---

a b, feladatban először a negyedik (d,) tételt alkalmazzuk, majd az ötödiket (e,)

$\binom{11}{6} = \binom{11}{5} \rightarrow \binom{11}{4}+\binom{11}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!.7!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5.4.3.2.7!} = 11.9.8 = 792$

---

a c, feladatban először az ötödik (e,) tételt alkalmazzuk, majd a negyediket (d,), és újra az ötödiket

$\binom{9}{3}+\binom{9}{2} = \binom{10}{3} \wedge \binom{10}{3} = \binom{10}{7} \rightarrow \binom{10}{7}+\binom{10}{6} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{7!.4!} = \frac{11.10.9.8.7!}{7!.4.3.2} = 11.10.3 = 330$

Fejezzük ki egy binomiális együtthatóval:

a, $\binom{13}{8}+\binom{13}{4}$ b, $\binom{11}{7}-\binom{10}{3}$ c, $\binom{17}{11}+\binom{17}{7}+\binom{18}{8}+\binom{19}{7}$

$$\binom{13}{8} + \binom{13}{4} = \binom{13}{5} + \binom{13}{4} = \binom{14}{5}$$

$$\binom{11}{7} - \binom{10}{3} = \binom{11}{7} - \binom{10}{7} = \binom{10}{6}$$

$$\binom{17}{11} + \binom{17}{7} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7} = \binom{17}{11} + \binom{17}{10} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7} = \binom{18}{11} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7} = \binom{18}{11} + \binom{18}{10} + \binom{19}{7} =$$
$$= \binom{19}{11} + \binom{19}{7} = \binom{19}{11} + \binom{19}{12} = \binom{20}{12}$$

Rendezzük:

a, $\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$

b, $\binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$

$$\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{5} = \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{5} = \binom{n+2}{5}$$

$$\binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} =$$
$$= \binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} =$$
$$= \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n+2}{k} + \binom{n+2}{k+2}$$

Oldjuk meg az egyenleteket:

a, $\binom{x-1}{x-2} + 2.\binom{x}{x-1} = \binom{7}{5} + 2$

b, $\binom{x}{x-2} - \binom{x-3}{x-5} = 15$

c, $\binom{x}{2} + \binom{x-2}{x-4} = \binom{9}{3} + 7$

d, $\binom{x+1}{x-1} - 4.\binom{x-1}{x-2} = \binom{x}{x-1}.\binom{x-1}{x-2} - \binom{x+2}{2}$

$x \geq 2$

$$\binom{x-1}{x-2} + 2.\binom{x}{x-1} = \binom{7}{5} + 2$$
$$\frac{(x-1)!}{(x-2)!.[x-1-(x-2)]!} + 2.\frac{x!}{(x-1)!.[x-(x-1)]!} = \frac{7!}{5!.2!} + 2$$
$$\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.1!} + 2.\frac{x.(x-1)!}{(x-1)!.1!} = \frac{7.6.5!}{5!.2} + 2$$
$$x - 1 + 2x = 21 + 2 \qquad /+1$$
$$3x = 24 \qquad /:3$$
$$x = 8$$

$x \geq 5$

$$\binom{x}{x-2} - \binom{x-3}{x-5} = 15$$
$$\frac{x!}{(x-2)!.[x-(x-2)]!} - \frac{(x-3)!}{(x-5)!.[x-3-(x-5)]!} = 15$$
$$\frac{x.(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.2!} - \frac{(x-3).(x-4).(x-5)!}{(x-5)!.2!} = 15 \qquad /.2$$
$$x.(x-1) - (x-3).(x-4) = 30$$
$$x^2 - x - (x^2 - 4x - 3x + 12) = 30$$
$$x^2 - x - x^2 + 7x - 12 = 30 \qquad /+12$$
$$6x = 42 \qquad /:6$$
$$x = 7$$

$x \geq 4$

$$\binom{x}{2} + \binom{x-2}{x-4} = \binom{9}{3} + 7$$
$$\frac{x!}{2!.(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)!.[x-2-(x-4)]!} = \frac{9!}{3!.6!} + 7$$
$$\frac{x.(x-1).(x-2)!}{2.(x-2)!} + \frac{(x-2).(x-3).(x-4)!}{(x-4)!.2!} = \frac{9.8.7.6!}{3.2.6!} + 7$$
$$\frac{x.(x-1)}{2} + \frac{(x-2).(x-3)}{2} = 3.4.7 + 7 \qquad /.2$$
$$x.(x-1) + (x-2).(x-3) = 168 + 14$$
$$x^2 - x + x^2 - 3x - 2x + 6 = 182 \qquad /-182$$
$$2x^2 - 6x - 176 = 0 \qquad /:2$$
$$x^2 - 3x - 88 = 0$$
$$(x-11).(x+8) = 0$$

$x - 11 = 0$ $\qquad$ $x + 8 = 0$

$x_1 = 11$ $\qquad$ $x_2 = -8$

$x \geq 2$

$$\binom{x+1}{x-1} - 4.\binom{x-1}{x-2} = \binom{x}{x-1}.\binom{x-1}{x-2} - \binom{x+2}{2}$$

$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!.[x+1-(x-1)]!} - 4.\frac{(x-1)!}{(x-2)!.[x-1-(x-2)]!} = \frac{x!}{(x-1)!.[x-(x-1)]!}.\frac{(x-1)!}{(x-2)!.[x-1-(x-2)]!} - \frac{(x+2)!}{2!.(x+2-2)!}$$

$$\frac{(x+1).x.(x-1)!}{(x-1)!.2!} - 4.\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.1!} = \frac{x.(x-1)!}{(x-1)!.1!}.\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.1!} - \frac{(x+2).(x+1).x!}{2!.x!}$$

$$\frac{(x+1).x}{2} - 4.\frac{x-1}{1} = \frac{x}{1}.\frac{x-1}{1} - \frac{(x+2).(x+1)}{2} \qquad /.2$$

$$(x + 1).x - 2.4.(x - 1) = 2.x.(x - 1) - (x + 2).(x + 1)$$

$$x^2 + x - 8x + 8 = 2x^2 - 2x - (x^2 + x + 2x + 2)$$

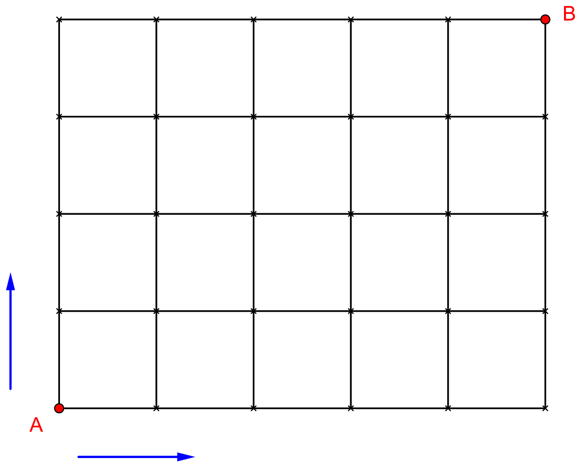
$$x^2 - 7x + 8 = 2x^2 - 2x - x^2 - 3x - 2$$

$$x^2 - 7x + 8 = x^2 - 5x - 2 \qquad /-x^2 + 7x + 2$$

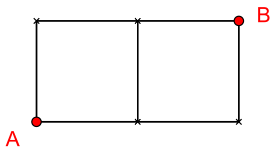
$$10 = 2x \qquad /:2$$

$$5 = x$$

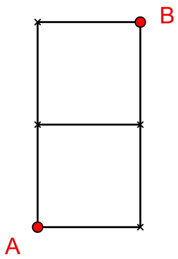
Hány különböző úton juthatunk el az A pontból a B pontba a rácsvonal mentén, ha csak két irányban mozoghatunk: jobbra és felfelé (a legrövidebb út)?



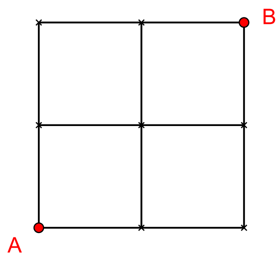
Egyszerűbb esetekkel kezdünk.



az 1. eset

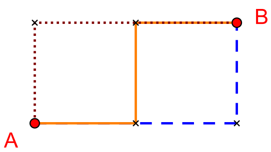


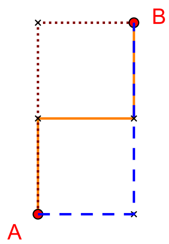
a 2. eset



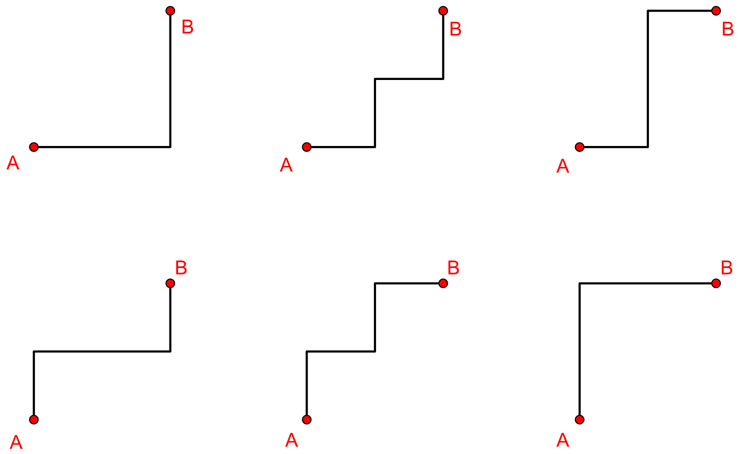
a 3. eset

- az első és a második eset hasonló (csak a méretek lettek felcserélve) – könnyedén megtaláljuk mindhárom utat (különböző színű és stílusú vonalakkal vannak kijelölve)



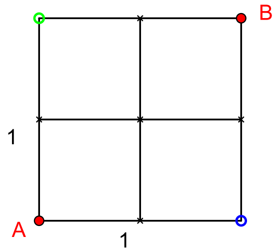


- a harmadikat is sikerül megoldani



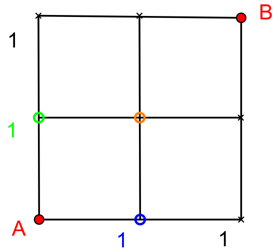
Nagyobb méreteknél megtalálni az összes különböző utat időigényes és pszichikailag is megerőltető volna → valami egyszerűbb módszerre próbáljunk rájönni.

Jelöljük meg a rácspontokat azokkal a számokkal, ahány különböző úton tudunk eljutni az adott pontba. Kezdjük az A pont szomszédjaival – a jobbra lévő és a felette található pontokkal. Ezekbe csak az A pontból jöhettünk → így ide 1 kerül.

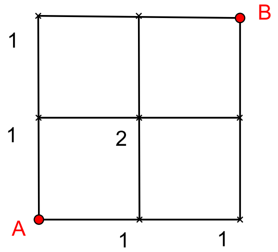


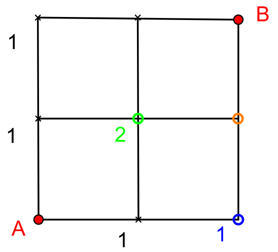
- a kék pontba szintén csak egy pontból jöhettem, a tőle balra lévőből (az A pontból kétszer jobbra)
- a zöld pontba csak az alatta lévő pontból jöhetek (az A pontból kétszer fel)

Így a rács ezen pontjaiba is egyeseket írunk.

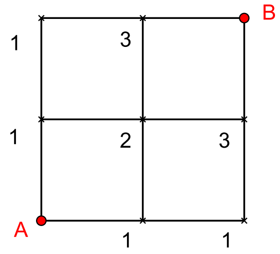


- a narancssárga pontba jöhetünk a kék pontból is és a zöld pontból is
- mivel ezekbe a pontokba csak egy úton kerülhettünk (egyesek vannak a pontok mellett), ezek összege adja a narancssárga pontba vezető utak számát: 1 + 1 = 2 → kettest írunk mellé

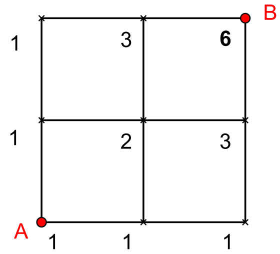




- a következő narancssárga pontba jöhetünk a kék pontból vagy a zöld pontból
- ismét összeadjuk ezeket a számokat 1 + 2 = 3 → hármast írunk
- ugyanígy a zöld pont felett az összeg 2 + 1 = 3



Az utolsó pont maga a cél – a B pont. A két szomszédos pontból érkezhetünk – ott hármasok szerepelnek. Ezek összege adja az összes lehetőség számát, amit így megkapunk: 3 + 3 = 6.



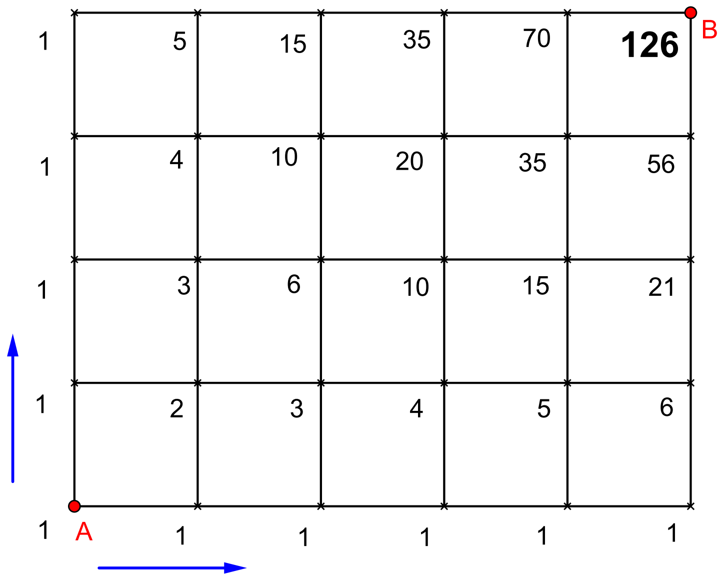
M. *Még kiegészítettük ábránkat az A pontnál az 1 számmal.*

Ezt a módszert nemrég alkalmaztuk – a Pascal-féle háromszögben. Csak itt a háromszög elfordítva és kivágva szerepel (nem tartalmaz minden sort egészében).

M. Nem véletlenül oldunk ilyen típusú feladatot a binomiális együtthatók tulajdonságai után.

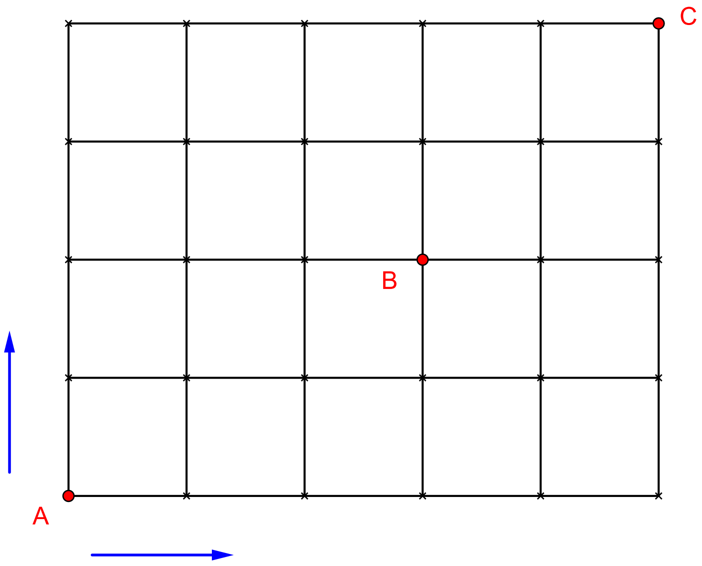
Nos, fejezzük be eredeti feladatunkat ezzel a módszerrel:

- az alsó és a baloldali szélső rácspontok 1-est kapnak (oda csak egy út vezet – csak jobbra vagy csak felfelé)
- a többi rácspont két pont számainak összegét kapja: az alatta és a balra lévő összegét



n = 126

Hány különböző úton juthatunk el a rácsvonal mentén az A pontból a C pontba a B ponton keresztül, ha csak két irányban mozoghatunk: jobbra és felfelé (a legrövidebb út)?



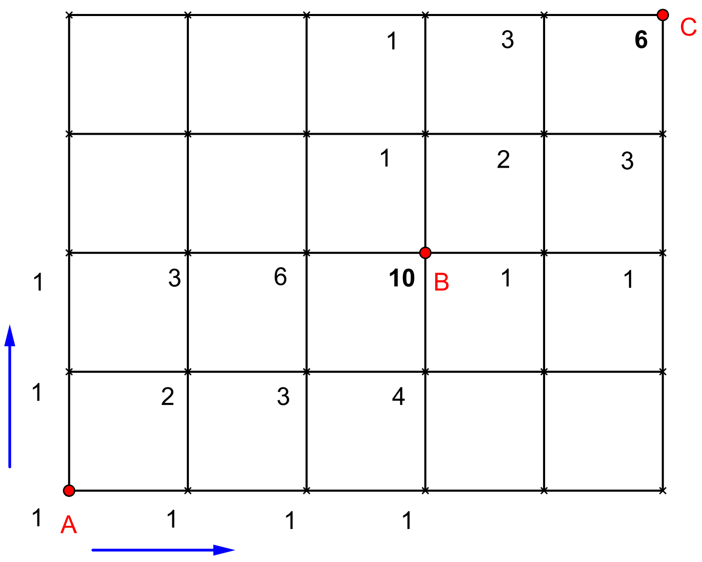
Anélkül, hogy megoldanánk a feladatot, rájöhetünk arra, hogy kevesebb ilyen út létezik (miközben a rácsvonal mérete nem változott). Ez abból következik, hogy vannak olyan pontok, amin keresztül nem halad semmilyen útvonal – az AB téglalaptól jobbra; és az AB téglalap felett (ezekből a pontokból már nem juthatok el a B pontba – mivel nem haladhatok balra sem lefelé).

A feladatot úgy oldjuk, mintha két rácsunk lenne:

az egyik az AB átlójú téglalap

a másik a BC átlójú négyzet

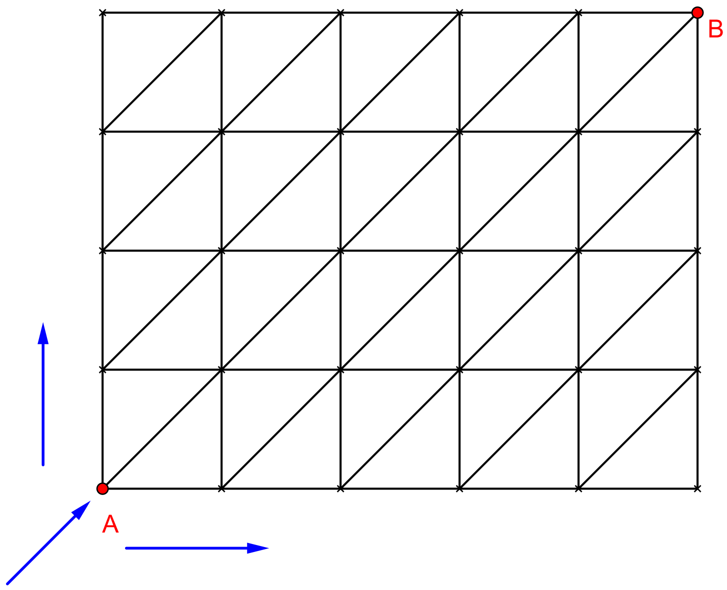
Az első rács céljában (a B pontban) kapunk egy számot, hasonlóan a másodikban (a C pontban) – a kérdésre a választ megkapjuk, ha ezen útvonalak számát összeszorozzuk.



n = 10.6

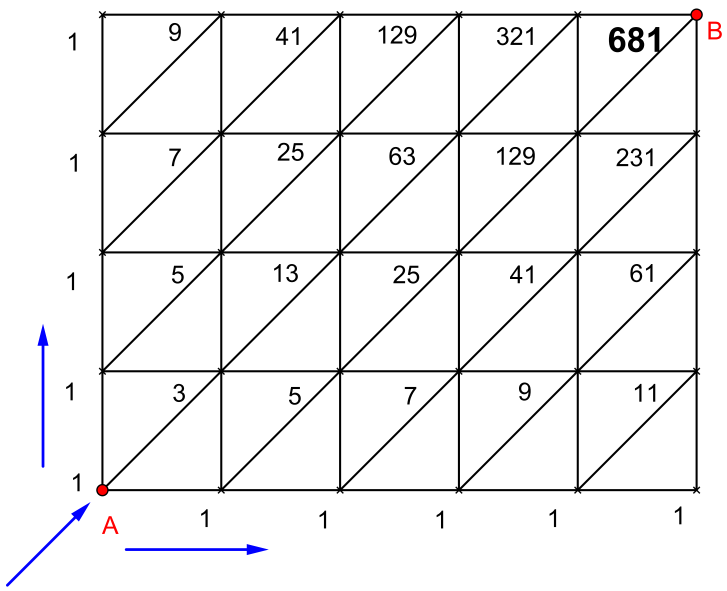
n = 60

Hány különböző úton juthatunk el az A pontból a B pontba a rácsvonal mentén, ha csak három irányban mozoghatunk: jobbra, felfelé és az A pontból a B pont felé mutató átlók mentén?



Hasonlóan járunk el itt is, csak az útvonalak kiszámításában lesz változás.

- az alsó és a baloldali szélső pontokhoz 1-eseket írunk
- a többi rácsponthoz három pont számainak összege kerül: az alatta lévő, a tőle balra lévő és az átlómenti pont száma



n = 681