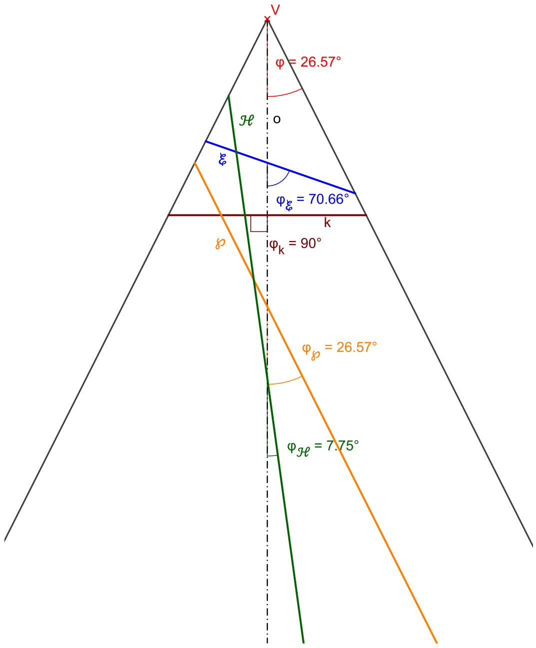
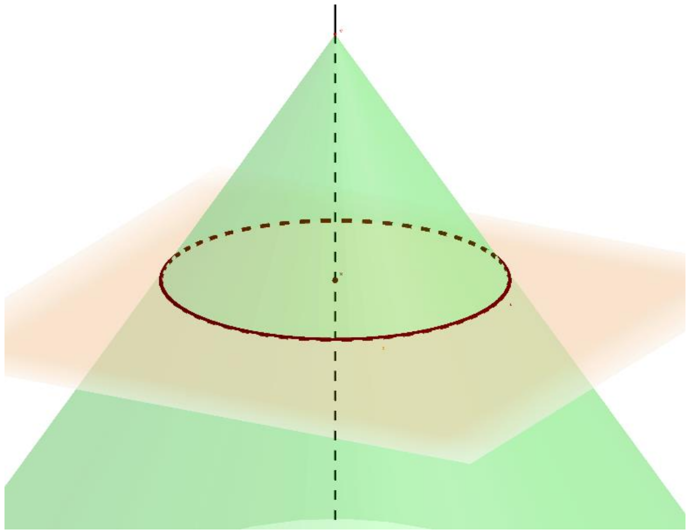
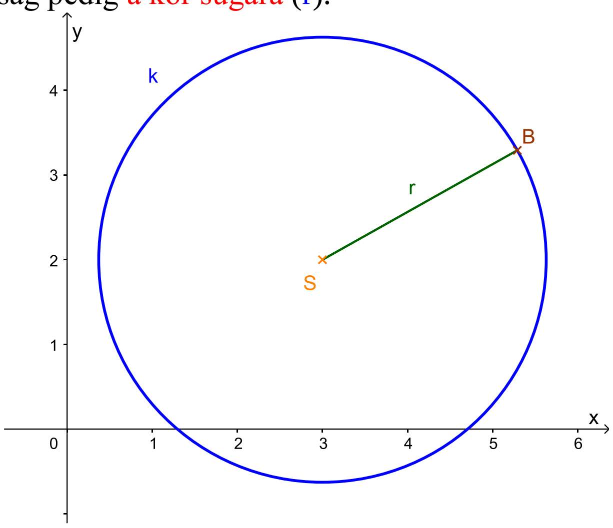
A kör
(Kružnica)

koordinátageometria: másodfokú (másodrendű) alakzat, másodfokú görbe
euklideszi geometria: kúpszelet (kúpfelület és sík metszésvonala) – mikor a sík merőleges a kúpfelület tengelyére





D. ***A kör*** a sík azon pontjainak halmaza, melyek egy adott ponttól azonos távolságra vannak. Az adott pont a kör középpontja (S) az azonos távolság pedig a kör sugara (r).



Adott egy kör középpontjával és sugarával: S(u; v); r
A kör egy tetszőleges B(x; y) pontjára érvényes:

$$|BS| = r$$

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r$$

négyzetre emeléssel megkapjuk a kör egyenletét:

k: S(u; v); r – a kör középponti egyenlete:

$$k\colon (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

M. Ha a kör alaphelyzetű (középpontja az origó), akkor egyenletünk az alábbi alakot ölti:

$$k\colon x^2 + y^2 = r^2$$

eltüntetjük a zárójeleket, mindent egy oldalra viszünk, rendezzük ⟶ a kör általános egyenlete:

$$k\colon A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0 \qquad A;\ B;\ C;\ D;\ E \in \mathbb{R}$$

feltétel: $A = B \wedge C^2 + D^2 - 4AE > 0$

$$k\colon \left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{C^2 + D^2 - 4AE}{4A^2}$$

$S\left(\frac{-C}{2A}; \frac{-D}{2A}\right)$

$r = \sqrt{\frac{C^2+D^2-4AE}{4A^2}} = \frac{\sqrt{C^2+D^2-4AE}}{2A}$

a kör paraméteres egyenlete:

k: $x = r.\cos\varphi$; $y = r.\sin\varphi$ $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

példa:

Írjuk fel a kör középponti egyenletét, majd fejezzük ki belőle az egyenes általános egyenletét, ha adott:

a, S(-3; 5); r = 7 b, S(9; -4); r = 5

c, S(0; 2); r = 9 d, S(0; 0); r = 10

a, $(x-(-3))^2 + (y-5)^2 = 7^2$

k: $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 49$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 49$ /-49

k: $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$

b, $(x-9)^2 + (y-(-4))^2 = 5^2$

l: $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 25$

$x^2 - 18x + 81 + y^2 + 8y + 16 = 25$ /-25

l: $x^2 + y^2 - 18x + 8y + 72 = 0$

c, $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 9^2$

m: $x^2 + (y-2)^2 = 81$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 81$ /-81

m: $x^2 + y^2 - 4y - 77 = 0$

d, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 10^2$

n: $x^2 + y^2 = 100$ /-100

n: $x^2 + y^2 - 100 = 0$

Alakítsuk át a kör középponti egyenletére, és határozzuk meg S középpontjának koordinátáit és r sugarának nagyságát:

a, $x^2 + y^2 - 8x - 20 = 0$ b, $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = 0$

c, $3x^2 + 3y^2 - 7x + 5y + 6 = 0$

a, rendezzük: az x-es tagok, az y-os tagok, a szám pedig a másik oldalra

$x^2 - 8x + y^2 = 20$

kiegészítjük teljes négyzetté (kéttagú kifejezés négyzetére)

$(x^2 - 8x) + y^2 = 20$

$(x^2 - 8x + 16) + y^2 = 20 + 16$

k: $(x-4)^2 + y^2 = 36$

S(4; 0); r = 6

b, $x^2 + 10x + y^2 - 6y = -18$

$(x^2 + 10x) + (y^2 - 6y) = -18$

$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) = -18 + 25 + 9$

l: $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 16$

S(-5; 3); r = 4

c, $3x^2 - 7x + 3y^2 + 5y = -6$

kiemeljük a másodfokú tag együtthatóját

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) + 3\left(y^2 + \frac{5}{3}y\right) = -6$$

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \left(-\frac{7}{6}\right)^2\right) + 3\left(y^2 + \frac{5}{3}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = -6 + 3.\left(-\frac{7}{6}\right)^2 + 3.\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36}\right) + 3\left(y^2 + \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}\right) = -6 + 3.\frac{49}{36} + 3.\frac{25}{36}$$

$$3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + 3\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

$$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\left(y+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$S\left(\frac{7}{6};-\frac{5}{6}\right)$; $r=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

Az S középpontú kör áthalad a B ponton. Írjuk fel ezen kör általános egyenletét: S(11; -7), B(5; 3)

$$r=|BS|=\sqrt{(5-11)^2+\left(3-(-7)\right)^2}=\sqrt{(-6)^2+10^2}=\sqrt{136}$$

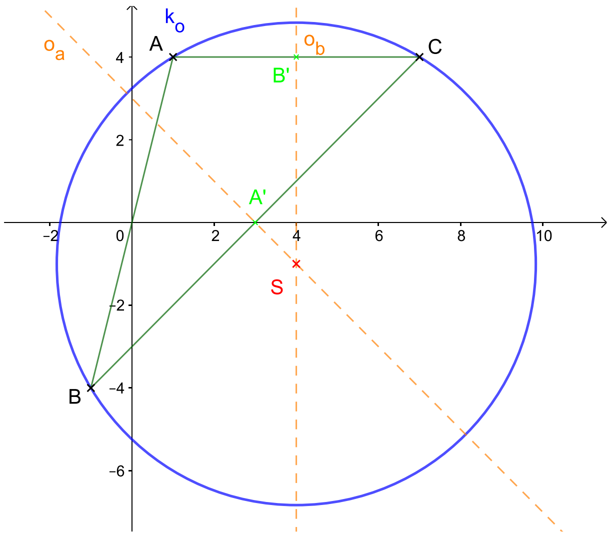
k: $(x-11)^2+(y+7)^2=136$

$x^2-22x+121+y^2+14y+49=136$

k: $x^2+y^2-22x+14y+34=0$

Írjuk fel az adott három ponthoz illeszkedő kör egyenletét: A(1; 4), B(-1; -4), C(7; 4)

a háromszög köré írt körének a középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja



$A'=\frac{B+C}{2}=(3;0)$

$\overrightarrow{n_{o_a}}=\overrightarrow{BC}=C-B=(8;8)\sim(1;1)$

o_a: $1.x+1.y+c=0$

$A'\in o_a$

$1.3+1.0+c=0$

$c=-3$

o_a: $x+y-3=0$

$B'=\frac{A+C}{2}=(4;4)$

$\overrightarrow{n_{o_b}}=\overrightarrow{AC}=C-A=(6;0)\sim(1;0)$

o_b: $1.x+0.y+c=0$

$B'\in o_b$

$1.4+0.4+c=0$

$c=-4$

o_b: $x-4=0$

$x+y-3=0$

$x-4=0 \;\rightarrow\; x=4$

$4+y-3=0$

$1+y=0$

$y=-1$

S(4; -1)

$r=|AS|=\sqrt{(4-1)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$

k: $(x-4)^2+(y+1)^2=34$