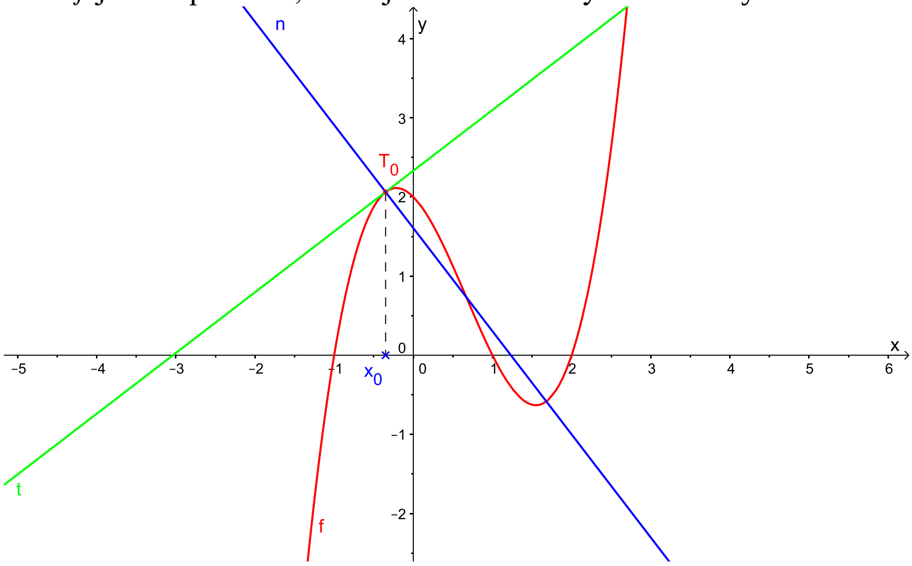
Geometrický význam derivácie - dotyčnica a normála

D. ***Dotyčnica*** (t) k funkcii f je taká priamka, ktorá na nejakom otvorenom intervale (a, b) má iba jeden spoločný bod s funkciou a graf funkcie na tom intervale je iba v jednej z polrovín podľa dotyčnice.

D. ***Normála*** (n) k funkcii f je taká priamka, ktorá je kolmá na dotyčnicu v dotykovom bode.



Hodnota derivácie v bode x_0 je smernica dotyčnice v tom bode.

$$f'(x_0) = k_t$$

Preto, ak potrebujeme napísať rovnicu dotyčnice v nejakom bode T_0, tak použijeme smernicovú rovnicu. Väčšinou nepoznáme dotykový bod, iba jeho x-ovú súradnicu (x_0). Dosadením do funkcie vypočítame chýbajúcu y-ovú súradnicu (y_0).

Potom derivujeme funkciu. Do derivovanej funkcie dosadíme x-ovú súradnicu dotykového bodu a tak dostaneme smernicu dotyčnice (k_t). Napíšeme predbežný tvar smernicovej rovnice dotyčnice. Chýbajúcu konštantu (b) vypočítame dosadením dotykového bodu do rovnice, nakoľko dotykový bod leží na dotyčnici.

Normála je kolmá na dotyčnicu. Preto smernicu normály môžeme vypočítať vzťahom:

$$k_n = -\frac{1}{k_t}$$

Potom postupujeme podobne ako pri dotyčnici.

príklad:

Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku krivke $f(x) = x^2 + 3x - 2$ v bode $T_0(2; y_0)$.

najprv určíme chýbajúcu súradnicu

$f(x_0) = f(2) = 2^2 + 3.2 - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$

$T_0(2; 8)$

derivujeme funkciu

$f'(x) = (x^2 + 3x - 2)' = 2x + 3$

hodnota derivácie sa rovná smernice dotyčnice

$k_t = f'(x_0) = f'(2) = 2.2 + 3 = 4 + 3 = 7$

môžeme písať smernicovú rovnicu dotyčnice

t: $y = k_t.x + b$

$y = 7x + b$

dosadíme dotykový bod, aby sme mohli vypočítať chýbajúce číslo b

$8 = 7.2 + b$

$8 = 14 + b \qquad /-14$

$-6 = b$

takže konečný tvar smernicovej rovnice dotyčnice

t: $y = 7.x - 6$

P. Ak potrebujeme iný typ rovnice priamky (všeobecnú, parametrickú, …), v druhom ročníku sme sa učili prechody na iný typ.

vypočítame smernicu normály

$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{7}$

pokračujeme so smernicovou rovnicou

n: $y = k_n.x + b$

$y = -\frac{1}{7}x + b$

znovu dosadíme dotykový bod, aby sme mohli vypočítať chýbajúce číslo b

$8 = -\frac{1}{7}.2 + b$

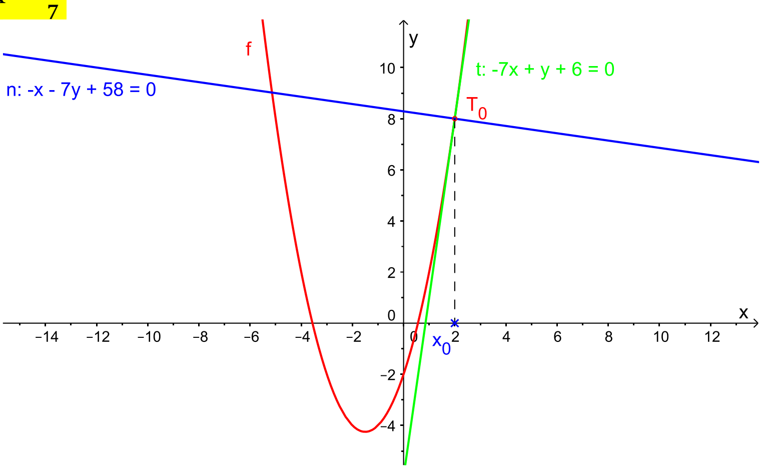
$8 = -\frac{2}{7} + b \qquad /+\frac{2}{7}$

$8 + \frac{2}{7} = b$

$\frac{58}{7} = b$

takže konečný tvar smernicovej rovnice normály

n: $y = -\frac{1}{7}.x + \frac{58}{7}$



Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku krivke $g(x) = \frac{x^3}{20} + \frac{3x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{8}{5}$ v bode $T_0(-4; y_0)$.

vypočítame y_0

$g(x_0) = g(-4) = \frac{(-4)^3}{20} + \frac{3.(-4)^2}{20} - \frac{9.(-4)}{5} + \frac{8}{5} = \frac{-64}{20} + \frac{3.16}{20} - \frac{-36}{5} + \frac{8}{5} = \frac{-16}{5} + \frac{12}{5} + \frac{36}{5} + \frac{8}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$T_0(-4; 8)$

derivujeme funkciu

$g'(x) = \left(\frac{x^3}{20} + \frac{3x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{8}{5}\right)' = \frac{3x^2}{20} + \frac{6x}{20} - \frac{9}{5}$

určíme smernicu dotyčnice

$k_t = g'(x_0) = g'(-4) = \frac{3.(-4)^2}{20} + \frac{6.(-4)}{20} - \frac{9}{5} = \frac{3.16}{20} + \frac{-24}{20} - \frac{9}{5} = \frac{12}{5} - \frac{6}{5} - \frac{9}{5} = -\frac{3}{5}$

smernicová rovnica dotyčnice

t: $y = k_t.x + b$

$y = -\frac{3}{5}x + b$

dosadíme dotykový bod

$8 = -\frac{3}{5}(-4) + b$

$8 = \frac{12}{5} + b \qquad /-\frac{12}{5}$

$8 - \frac{12}{5} = b$

$\frac{28}{5} = b$

rovnica dotyčnice

$$t: y = -\frac{3}{5}x + \frac{28}{5}$$

smernica normály

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

smernicová rovnica normály

$$n: y = k_n.x + b$$

$$y = \frac{5}{3}x + b$$

dosadíme dotykový bod

$$8 = \frac{5}{3}(-4) + b$$

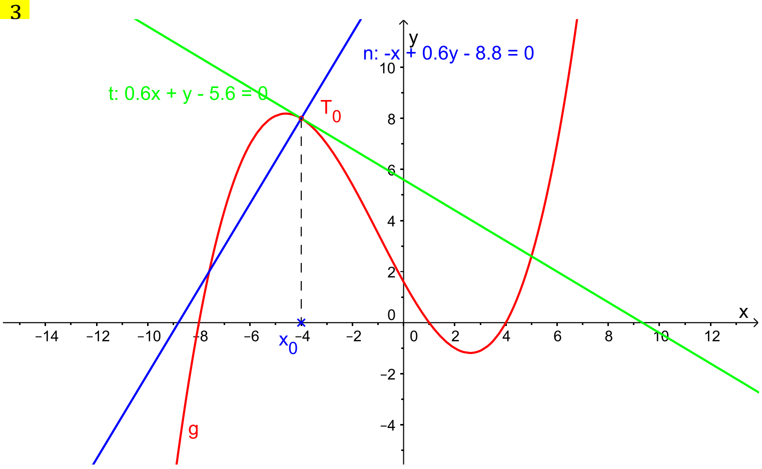
$$8 = -\frac{20}{3} + b \qquad /+\frac{20}{3}$$

$$8 + \frac{20}{3} = b$$

$$\frac{44}{3} = b$$

rovnica normály

$$n: y = \frac{5}{3}x + \frac{44}{3}$$



Napíšte rovnice dotyčníc ku krivke $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$, ak sú rovnobežné s priamkou r: $2x - y + 1 = 0$.

zo všeobecnej rovnice priamky určíme normálový vektor priamky r

$\overrightarrow{n_r} = (2; -1)$

ak dotyčnica má byť rovnobežná s danou priamkou, potom ich normálové vektory sú takisto rovnobežné

$\overrightarrow{n_r} \parallel \overrightarrow{n_t}$

preto normálovým vektorom hľadaných dotyčníc môže byť $\overrightarrow{n_r}$

$\overrightarrow{n_r} = \overrightarrow{n_t} = (2; -1)$

z toho vieme napísať smerový vektor dotyčnice (kolmý vektor na normálový) a neskoršie aj smernicu

$\overrightarrow{n_t} \perp \overrightarrow{s_t} \Rightarrow \overrightarrow{s_t} = (1; 2)$

$k_t = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2}{1} = 2$

teraz sa vráťme ku krivke – ak by sme chceli napísať dotyčnicu, jej smernicu by sme určili ako hodnotu derivácie v dotykovom bode ⇒ derivujeme funkciu

$h'(x) = (x^3 - 5x^2 + 5x + 3)' = 3x^2 - 10x + 5$

riešime rovnicu: derivovaná funkcia kde nadobudne práve tú hodnotu k_t

$$3x^2 - 10x + 5 = 2$$

je to kvadratická rovnica → anulujeme a dosadíme do vzorca

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4.3.3}}{2.3} = \frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6} = \frac{10\pm 8}{6} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{matrix}$$

dostali sme x-ové súradnice dotykových bodov → vypočítame chýbajúce y-ové (dosadíme do pôvodnej, nederivovanej funkcie)

$h(x_1) = h(3) = 3^3 - 5.3^2 + 5.3 + 3 = 27 - 5.9 + 15 + 3 = 0$

$h(x_2) = h\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5.\frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{27} - 5.\frac{1}{9} + \frac{5}{3} + 3 = \frac{112}{27}$

$T_1(3;\ 0)$; $T_2\left(\frac{1}{3}; \frac{112}{27}\right)$

napíšeme predbežný tvar smernicovej rovnice dotyčníc → na výpočet chýbajúcej konštanty dosadíme dotykové body ⇒ dve rôzne rovnice → dve také dotyčnice sme našli

t: $y = 2x + b$

$T_1 \in t$

$0 = 2.3 + b_1$

$0 = 6 + b_1 \qquad /-6$

$-6 = b_1$

$T_2 \in t$

$\frac{112}{27} = 2.\frac{1}{3} + b_2$

$\frac{112}{27} = \frac{2}{3} + b_2 \qquad /-\frac{2}{3}$

$\frac{112}{27} - \frac{2}{3} = b_2$

$\frac{94}{27} = b_2$

takže rovnice rovnobežných dotyčníc sú:

t_1: $y = 2x - 6$ $\qquad$ t_2: $y = 2x + \frac{94}{27}$