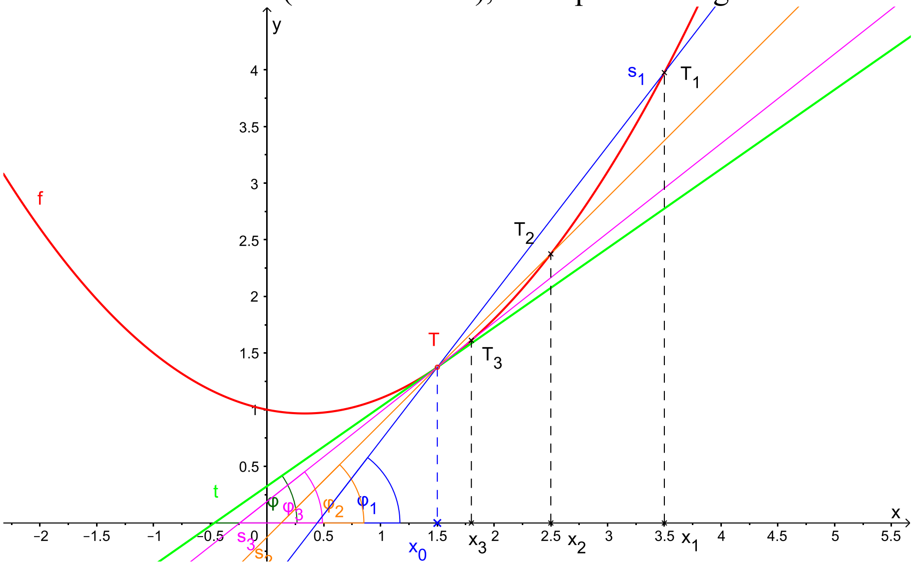
Derivácia funkcie

Hľadáme dotyčnicu k funkcii f v bode x_0. Potrebujeme určiť tú priamku – priamka je daná, ak poznáme:

- dva body priamky
- bod a rovnobežnú priamku
- bod a kolmú priamku
- bod a uhol s x-ovou osou – smerový uhol (v súradnicovej sústave)

D. ***Dotyčnica*** k funkcii f je taká priamka, ktorá na nejakom otvorenom intervale (a, b) má iba jeden spoločný bod s funkciou a graf funkcie na tom intervale je iba v jednej z polrovín podľa dotyčnice. (mimo intervalu môže mať s grafom funkcie aj viac spoločných bodov)
Výnimkou je dotyčnica v inflexnom bode (viď. neskoršie), ktorá prechádza grafom funkcie.



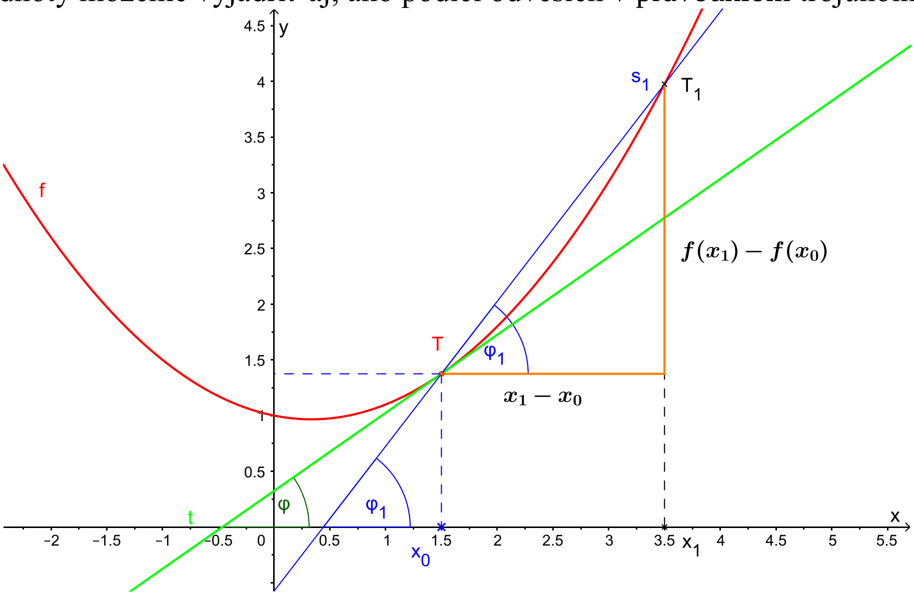
Poznáme bod hľadanej dotyčnice t. Skúsime určiť smerový uhol φ. Použijeme na to sečnice v rôznych bodoch, blížiacich sa k bodu T. Nad hodnotami x_1; x_2; x_3; … nájdeme body na grafe T_1; T_2; T_3; … . Čím bližšie som s x-ovými hodnotami k x_0, tým bližšie sú sečnice k hľadanej dotyčnici, a takisto aj smerové uhly ($φ_1$; $φ_2$; $φ_3$; …) sa blížia k smerovému uhlu φ dotyčnice.
Ak teda chceme napísať rovnicu dotyčnice (lebo tým vyriešime náš problém: mám rovnicu ≡ poznám priamku), stačí určiť smernicu priamky. Smernica priamky je tangensová hodnota smerového uhla.

$k = \operatorname{tg} φ$

Ak určenie smernice robím tým istým spôsobom, čiže vypočítam smernice sečníc, blížiacich sa k dotyčnici, potom aj tie smernice sa blížia k hľadanej hodnote k.

$k_1 = \operatorname{tg} φ_1$; $k_2 = \operatorname{tg} φ_2$; $k_3 = \operatorname{tg} φ_3$; …

Tieto tangensové hodnoty môžeme vyjadriť aj, ako podiel odvesien v pravouhlom trojuholníku.



$k_1 = \operatorname{tg} φ_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Limita týchto podielov potom sa musí rovnať k smernici hľadanej dotyčnice.

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Túto smernicu nazývame hodnotou derivácie funkcie f v bode x_0.

D.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

P. Viacerými spôsobmi môžeme zapísať deriváciu. V definícii použitý zápis sa môže použiť iba pri funkciách s jednou premennou.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

V. $\forall x = x_0$: $\exists f'(x)$; $g'(x)$; $c \in \mathbb{R}$

a, derivácia súčtu (rozdielu)

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ — každý člen súčtu derivujeme a sčítame (odčítame) ich

b, derivácia násobku

$(c.f)'(x) = c.f'(x)$ — derivovanú funkciu násobíme číslom

c, derivácia súčinu

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ — derivujeme jednu a násobíme druhou nederivovanou potom naopak a tieto súčiny sčítame

d, derivácia podielu

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ — derivovaný čitateľ násobený s menovateľom mínus čitateľ násobený s derivovaným menovateľom, delené druhou mocninou menovateľa

Dô.

a, $$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

b, $$(c.f)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{c.f(x)-c.f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{c.[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0} = c.\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c.f'(x_0)$$

c, $$(f.g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0).g(x)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x)+f(x_0).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)].g(x)+f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)].g(x)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}g(x) + \lim_{x\to x_0}f(x_0).\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

d, $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x)}{g(x).g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x)}{(x-x_0).g(x).g(x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x).g(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)-f(x_0).g(x)+f(x_0).g(x_0)}{x-x_0}.\frac{1}{g^2(x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)].g(x_0)-f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}.\frac{1}{g^2(x_0)} = \left[\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)].g(x_0)}{x-x_0} - \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}\right].\frac{1}{g^2(x_0)}$$
$$= \left[\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}g(x_0) - \lim_{x\to x_0}f(x_0).\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].\frac{1}{g^2(x_0)} = [f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)].\frac{1}{g^2(x_0)}$$
$$= \frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

príklad:

Vypočítajte hodnotu derivácie funkcie $f(x) = 3x + 2$ v bode $x_0 = 2$.

$$f'(x_0) = f'(2) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x+2-(3.2+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x+2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2} =$$

$= \lim_{x\to 2} 3 = 3$

Vypočítajte hodnotu derivácie funkcie $g(x) = x^2$ v bode $x_0 = 4$.

$$g'(x_0) = g'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-4^2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4 + 4 = 8$$

Vypočítajte hodnotu derivácie funkcie $h(x) = x^2 – 2x$ v bode $x_0 = -1$.

$$h'(x_0) = h'(-1) = \lim_{x\to -1}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-\left((-1)^2-2(-1)\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to -1}(x-3) = -1 - 3 = -4$$

Vypočítajte hodnotu derivácie funkcie $i(x) = x^3 – 4x^2 – 3x$ v bode $x_0 = 1$.

$$i'(x_0) = i'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{i(x)-i(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2-3x-\left(1^3-4.1^2-3.1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2-3x-(-6)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2-3x+6}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-3x-6)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2-3x-6) = 1^2 - 3.1 - 6 = -8$$